ASSIGNATURA: Mètodes Matemàtics de la Física II
DEPARTAMENT: Física Fonamental
DATA EXAMEN: 26 – gener – 2010

1. *(3 punts)* Transformeu l'equació diferencial en derivades parcials

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad u = u(x,t), \quad c = constant$$

en una equació a coeficients constants mitjançant el canvi $x = e^z$. A continuació, resoleu l'equació resultant pel mètode de separació de variables. Trobeu la solució $u(x,t)$, periòdica en t, i que satisfà les condicions de contorn

$$u(l,t) = 0, \quad u(2l,t) = 0 \quad \forall t$$

2.A *(1.5 punts)* Utilitzeu la transformada de Fourier per resoldre l'equació diferencial:

$$y' - 4y = \theta(t)\exp(-4t), \quad \text{on} \quad \theta(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0 \quad \text{i} \quad \theta(t) = 1 \quad \text{si} \quad t \geq 0.$$

2.B *(1.5 punts)* Trobeu la transformada de Laplace de la funció

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \theta(t-t_0)f(t_0)dt_0, \quad \text{en termes de} \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)].$$

nota: $\theta(t-t_0)$ és la funció esglaó de Heaviside definida per $\theta(t-t_0) = 0$ si $t < t_0$ i $\theta(t-t_0) = 1$ si $t \geq t_0$. La funció $\theta(t)$ correspon al cas particular $t_0 = 0$.

3.A *(0.5 punts)* Dóna les diferents caracteritzacions de l'espai de probabilitat d'una variable aleatòria tipus Poisson de paràmetre λ: mesura de probabilitat dF, funció de distribució $F(x)$, funció característica, funció cumulant, desviació típica, asimetria i curtosi.

3.B *(1.5 punts)*

(a) Determineu la mesura de probabilitat $dF(x) = f(x)dx + \Sigma p_i\delta_{x_i}$ per a una variable aleatòria X el valor de la qual correspon en un 60% dels casos a un nombre a l'atzar triat del conjunt discret $\{-1,0,1\}$ i en un 40% dels casos a un nombre real triat a l'atzar a l'interval (-1,1).

(b) Representeu gràficament la seva funció de distribució F(x).

(c) Calculeu els quatre primers moments, la desviació típica i la curtosi de la variable X.

(d) Si $Z = \Sigma_{i=1}^n X_i$ amb les X_i independents i equidistribuïdes amb X, determineu per a quins valors de n es té a) $\sigma \geq 10$, b) $|\gamma_c| \leq 0.01$

4. *(2 punts)* En la regió $x > 0$ del pla euclidià de coordenades cartesianes $\{x,y\}$ considereu com a noves coordenades les funcions $p = x + xy, \quad q = -xy$. Expressant sempre totes les components de les matrius i tensors com a funcions de les coordenades cartesianes, determineu:

(a) El canvi (en tots dos sentits) de base holònoma o "natural" associat al canvi de coordenades, tant a l'espai tangent com a l'espai cotangent.

(b) Les matrius i la forma tensorial completa de la mètrica euclídea en les noves bases, tant en la seva forma 2-covariant com en la 2-contravariant.

(c) En el punt de coordenades cartesianes $x = 1, y = 1$ particularitzeu les dues expressions matricials (2-covariant, 2-contravariant) de la mètrica. En el mateix punt doneu l'expressió de les noves bases en funció de la base cartesiana i realitzeu (de manera superposada i a escala) la seva representació gràfica.

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$; Cambio $x = e^z$; $z = \ln x$

$\hookrightarrow c = cte$

Tenemos que pasar de $\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial z}$; $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt$

$u(x,t) \to u(z,t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)_t = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{1}{x} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} \cdots$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \right.$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{x}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}_{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial z}.$$

La ec. dif. en ∂ para $u(z,t)$ queda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t}$$ [Ec. dif. en ∂ respect $u(z,t)$ z,t de coef. ctes]

Separación de variables $u(z,t) \overset{hip.}{=} Z(z)\,T(t)$

$$T(t)\left[\frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{dZ}{dz}\right] = \frac{Z(z)}{c^2}\frac{d^2 T}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{Z''}{Z} - \frac{Z'}{Z}}_{\varphi(z)} = \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}}_{f(t)} = \alpha \qquad \Rightarrow cte$$

$\forall x, t$

$Z''(z) - Z'(z) - \alpha Z(z) = 0$; $Z(z) \sim e^{mz}$; $m^2 - m - \alpha = 0$

$T''(t) - \alpha c^2 T(t) = 0$ $\qquad m = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\alpha}}{2}$

$\left.\begin{array}{l} T(t) \sim e^{pt} \\ T''(t) \sim p^2 e^{pt}\end{array}\right\}$ $p^2 - \alpha c^2 = 0$

$p^2 = \alpha c^2$; $p = \pm c\sqrt{\alpha}$ $\qquad \boxed{T(t) = A e^{c\sqrt{\alpha} t} + B e^{-c\sqrt{\alpha} t}}$

Para $Z(z) = C e^{\frac{1}{2}z} e^{\frac{1}{2}\sqrt{1+4\alpha}\, z} + D e^{\frac{1}{2}z} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+4\alpha}\, z}$

si la solución ha de ser periódica en t, $\alpha < 0$, hacemos $\alpha = -\omega^2$ $(\omega > 0)$;

Entonces $p = \pm c\sqrt{-\omega^2} = \pm c\sqrt{i^2\omega^2} = \pm i c\omega \to$ $T(t) = A \cos c\omega t + B \operatorname{sen} c\omega t$!

$u = u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$\left.\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= x^2 T(t) \frac{d^2 X}{dx^2} \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{X(x)}{c^2}\frac{d^2 T}{dt^2} \end{aligned}\right\} \text{ div por } X(x)T(t) \quad \left.\begin{aligned} \underbrace{\frac{x^2}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}}_{\varphi(x)} &= \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T}{dt^2}}_{f(t)} \\ \varphi(x) &= f(t) \quad \forall x,t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ cte!!

$$\frac{x^2}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = \lambda \Rightarrow x^2 \frac{d^2X}{dx^2} - \lambda X(x) = 0$$

$$\frac{1}{c^2 T(t)}\frac{d^2T}{dt^2} = \lambda \Rightarrow \frac{d^2T}{dt^2} - \lambda c^2 T(t) = 0$$

En el intervalo $(\ell, 2\ell)$ es un problema SL regular (con la cond. contorno, $X(\ell)=0$, $X(2\ell)=0$

$\rhd$ (ec. Euler?) $\quad X \sim x^p$, $X' \sim p x^{p-1}$, $X'' \sim p(p-1)x^{p-2}$

$$x^2 p(p-1)x^{p-2} - \lambda x^p = 0$$

$$p(p-1) - \lambda = 0$$

$$p^2 - p - \lambda = 0$$

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}$$

$$X(x) = A x^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4\lambda}}{2}} + B x^{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4\lambda}}{2}}$$

$\rhd$ $\left.\begin{aligned} T &\sim e^{pt} \\ T' &\sim p e^{pt} \\ T'' &\sim p^2 e^{pt} \end{aligned}\right\}$ $\quad p^2 - \lambda c^2 = 0 \Rightarrow p^2 = \lambda c^2;\ p = \pm c\sqrt{\lambda}$

$$T(t) = C e^{+c\sqrt{\lambda}\,t} + D e^{-c\sqrt{\lambda}\,t}$$

Para que sea periódica en $t \to$ exp. complejas. $\lambda = -\omega^2$ y por lo tanto $\sqrt{\lambda} = \sqrt{i^2\omega^2} = i\omega$

$$T(t) = C e^{i\omega c t} + D e^{-i\omega c t} = C(\operatorname{sen} \omega c t + D \cos \omega c t)$$

Entonces

$$\sqrt{1+4\lambda} = \sqrt{1-4\omega^2}$$

$$X(x) = x^{1/2}\left[A\, x^{\frac{\sqrt{1-4\omega^2}}{2}} + B\, x^{-\frac{\sqrt{1-4\omega^2}}{2}}\right]$$

$$X(\ell) = 0 = \ell^{1/2}\left[A\, \ell^{\frac{\sqrt{1-4\omega^2}}{2}} + B\, \ell^{-\frac{\sqrt{1-4\omega^2}}{2}}\right]$$

$$X(2\ell) = 0 = (2\ell)^{1/2}\left[A\, (2\ell)^{\frac{\sqrt{1-4\omega^2}}{2}} + B\, (2\ell)^{-\frac{\sqrt{1-4\omega^2}}{2}}\right]$$

cond. $\exists$ sol diff trivial $A = B = 0$

det coef $= 0$

$$X(x) = x^{1/2}\left[A\, x^{\frac{1}{2}\sqrt{1-4\omega^2}} + B\, x^{-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\omega^2}}\right]$$

Si $J = \frac{1}{2}\sqrt{1-4\omega^2}$, $\quad X(x) = x^{1/2}\left[A x^{J} + B x^{-J}\right]$

$$X(l) = 0 = l^{1/2}\left[A\, l^{J} + B\, l^{-J}\right]$$

$$X(2l) = 0 = (2l)^{1/2}\left[A\,(2l)^{J} + B\,(2l)^{-J}\right]$$

sol trivial $A=B=0$; sol dif trivial det coef $=0$

$$\begin{vmatrix} l^{J} & l^{-J} \\ (2l)^{J} & (2l)^{-J} \end{vmatrix} = 0$$

$$l^{J}(2l)^{-J} - l^{-J}(2l)^{J} = 0$$

$$\cancel{l^{J}}\, 2^{-J}\cancel{l^{-J}} - \cancel{l^{-J}}\, 2^{J}\cancel{l^{J}} = 0, \quad 2^{-J} - 2^{J} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{-J} = 2^{J} \Rightarrow \boxed{2^{2J} = 1}$$

$2J\ln 2 = 0$

$e^{2J\ln 2} = 1$; $\boxed{e^{2J\ln 2} = 1}$

det. raíces de la unidad

$2J\ln 2 = a + bi$

$e^{a+bi} = e^{a}\left[\cos b + i \operatorname{sen} b\right] = 1$ $\quad a = 0$; $\left\{\begin{matrix}\cos b = 1 \\ \operatorname{sen} b = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow b = 2\pi n$

En principio $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$\cancel{2}J\ln 2 = \cancel{2}\pi n i \; ; \quad J = \frac{\pi n}{\ln 2}\, i$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-4\omega^2} = \frac{\pi n}{\ln 2}\, i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(1-4\omega^2\right) = -\frac{n^2\pi^2}{(\ln 2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \left[\frac{n^2\pi^2}{(\ln 2)^2} + \frac{1}{4}\right]$$

Problema 2

Resolem:

2 (a) mitjançant la transformada de Fourier

$$y' - 4y = u(t)\, e^{-4t} \quad , \text{ on } \quad u(t) = \begin{cases} 0 \; , & t<0 \\ 1 \; , & t \geq 0 \end{cases}$$

$-\infty < t < +\infty$

$$\boxed{\hat{y}(\omega) = \mathcal{F}[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt \quad \text{(Def. Schaum)}}$$

Segui

$$\mathcal{F}\{y'\} - 4\,\mathcal{F}\{y\} = \mathcal{F}\{u(t)\, e^{-4t}\}$$

$$\mathcal{F}\{u(t)\, e^{-4t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-4t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-4t} e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{4+i\omega}$$

Per tant

$$i\omega\, \hat{y}(\omega) - 4\,\hat{y}(\omega) = \frac{1}{4+i\omega}$$

$$\boxed{y(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{y}(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega}$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{(4+i\omega)(-4+i\omega)} = \frac{-1}{16+\omega^2} =$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-1)\frac{e^{i\omega t}}{16+\omega^2} d\omega = -\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega-4i)(\omega+4i)} d\omega}_{I}$$

Si $t>0$

$$I = -\frac{e^{-4t}}{8}$$

Si $t<0$

$$I = -\frac{e^{4t}}{8}$$

en resum $\quad y(t) = -\frac{1}{8} e^{-|t|4}$

$$F(\omega) = \frac{2C_0 a}{\omega^2 + a^2} \; ; \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = C_0\, e^{-a|t|}$$

$C_0 = -1$,
$a^2 = 16; \; a = 4$

$$\frac{-1}{16+\omega^2} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2(-1)\cdot 4}{\omega^2+a^2} \; ; \quad f(t) = -\frac{1}{8} e^{-4|t|}$$

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \theta(t-t_0)\, f(t_0)\, dt_0 \quad , \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty \theta(t-t_0)\, f(t_0)\, dt_0\right] = \; ?$$

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \theta(t-t_0)\, f(t_0)\, dt_0 = \int_0^t f(t_0)\, dt_0$$

$$\mathcal{L}[\varphi(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t_0)\, dt_0\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Caso especial $\quad f(t_0) = e^{-4t_0}$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-4t_0}\, dt_0\right] = \frac{1}{(s+4)s} \qquad \text{cqd !!}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty \theta(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau \quad !!$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty \theta(t-t_0)\, f(t_0)\, dt_0\right] = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^\infty \theta(t-t_0)\, f(t_0)\, dt_0 =$$

$$= \left[\int_0^\infty dt_0\, f(t_0) \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\, \theta(t-t_0)\, dt}_{\mathcal{L}[\theta(t-t_0)] = \frac{e^{-st_0}}{s}}\right] = \int_0^\infty dt_0\, \frac{e^{-st_0} f(t_0)}{s} =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s} F(s). \qquad \text{cq.d}$$

$\hookrightarrow$ otra forma como $\mathcal{L}_t$ y la $\int$ es respecto de t_0

$$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty \theta(t-t_0)\, f(t_0)\, dt_0\right] = \int_0^\infty \mathcal{L}_t[\theta(t-t_0)]\, f(t_0)\, dt_0 =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-st_0}}{s} f(t_0)\, dt_0 = \frac{F(s)}{s}$$

3.A *(0.5 punts)* Dóna les diferents caracteritzacions de l'espai de probabilitat d'una variable aleatòria tipus Poisson de paràmetre λ: mesura de probabilitat dF, funció de distribució $F(x)$, funció característica, funció cumulant, desviació típica, asimetria i curtosi.

3.B *(1.5 punts)*

(a) Determina la mesura de probabilitat $dF(x) = f(x)dx + \Sigma p_i \delta_{x_i}$ per a una variable aleatòria X el valor de la qual correspon en un 60% dels casos a un nombre a l'atzar triat del conjunt discret $\{-1, 0, 1\}$ i en un 40% dels casos a un nombre real triat a l'atzar a l'interval (-1,1).

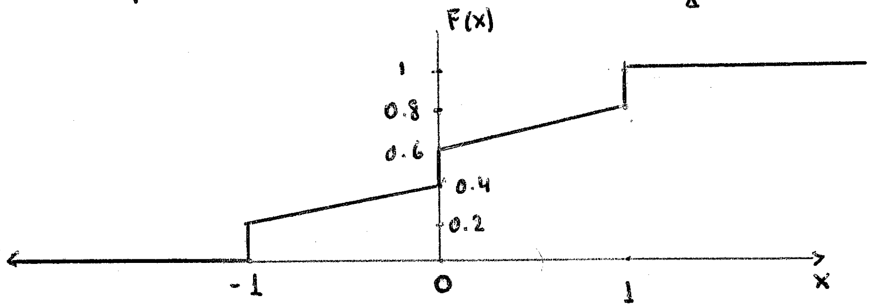
(b) Representa gràficament la seva funció de distribució F(x).

(c) Calcula els quatre primers moments, la desviació típica i la curtosi de la variable X.

(d) Si $Z = \Sigma_{i=1}^{n} X_i$ amb les X_i independents i equidistribuïdes amb X, per a quins valors de n es té a) $\sigma \geq 10$, b) $|\gamma_c| \leq 0.01$

Sobre l'espai de probabilitat $\Omega = [-1,1] \subset \mathbb{R}$ s'hi distribueix una mesura de probabilitat 0.6 equiprobablement sobre els punts $-1, 1, 0$. Per tant $\frac{1}{3}(0.6) = 0.2 = \frac{1}{5}$ sobre cadascun d'aquests punts. El resta de la mesura de probabilitat 0.4 es distribueix uniformement amb una densitat $f(x) = 0.2$: $\int_{-1}^{1} 0.2\, dx = 2 \times 0.2 = 0.4$. Per tant la mesura de probabilitat pot expressar-se en la forma $dF(x) = 0.2\, dx + 0.2(\delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1)$ $\quad x \in [-1,1]$

La representació gràfica de la funció de distribució $F_X(x) = P(X \leq x)$ serà, per tant:



La variable aleatòria X no és suma de dues variables aleatòries, una discreta i una altra continua. Per a ella

$$m_r = \int_{-1}^{1} x^r dF(x) = \frac{1}{5}\left\{\int_{-1}^{1} x^r dx + (-1)^r + 0^r + 1^r\right\} = \begin{cases} 0 & r \text{ senar} \\ \frac{2}{5(r+1)} + \frac{2}{5} & r \text{ parell} \end{cases}$$

Com $m_1 = 0$ $\quad m_r = \mu_r$ (els moments centrals coincideixen amb els ordinaris)

$$k_2 = \mu_2 = \sigma^2 = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{15} = 0.5\hat{3} \quad , \quad m_3 = \mu_3 = 0 = k_3 \quad m_4 = \mu_4 = \frac{12}{25}$$

$$k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}+1\right) - 3\,\frac{64}{225} = \frac{12}{25} - \frac{192}{225} = \frac{108-192}{225} = -\frac{84}{225} = -0.37\hat{3}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{8}{15}} \simeq 0.7303 \qquad \gamma_c = \gamma_e = \gamma_2 = \frac{k_4}{k_2^2} = -\frac{84}{225}\,\frac{15^2}{8^2} = -\frac{84}{64} = -\frac{21}{16} = -1.3125$$

$$Z = \sum_i^n X_i \qquad k_2(Z) = n\cdot\frac{8}{15} \geq 100 \qquad n \geq \frac{1500}{8} = 187.5 \rightarrow n_a \geq 188 \text{ per } \sigma(Z) > 10$$

$$k_4(Z) = -\frac{84}{225}n \qquad |\gamma_c(Z)| = \frac{21}{16}\,\frac{1}{n} < \frac{1}{100} \rightarrow n_b \geq \frac{2100}{16} = 131.25 \rightarrow$$

$$n_b \geq 132 \text{ per } |\gamma_c(Z)| < 0.01$$

Espai de probabilitat Poisson de paràmetre λ:

$$dF(x) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}\delta_r \; ; \; F(x) = \sum_{r=0}^{[x]} e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!} \; ; \; \varphi(t) = e^{-\lambda}\exp(\lambda e^{it}) \; ; \; \psi(t) = -\lambda + \lambda e^{it} = \lambda\sum_{1}^{\infty}\frac{(it)^r}{r!}$$

$[x]$ = part sencera d'x $\quad \rightarrow k_r = \lambda \;\forall r \rightsquigarrow \sigma = \sqrt{\lambda} \quad \gamma_a = \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \; ; \; \gamma_c = \gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$

4. *(2 punts)* En la regió $x > 0$ del pla euclidià de coordenades cartesianes $\{x, y\}$ considereu com a noves coordenades les funcions $p = x + xy$, $q = -xy$. Expressant sempre totes les components de les matrius i tensors com a funcions de les coordenades cartesianes, determineu:

(a) El canvi (en tots dos sentits) de base holònoma o "natural" associat al canvi de coordenades, tant a l'espai tangent com a l'espai cotangent.

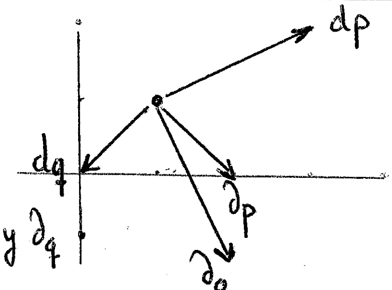
(b) Les matrius i la forma tensorial completa de la mètrica euclídea en les noves bases, tant en la seva forma 2-covariant com en la 2-contravariant.

(c) En el punt de coordenades cartesianes $x = 1, y = 1$ particularitzeu les dues expressions matricials (2-covariant, 2-contravariant) de la mètrica. En el mateix punt doneu l'expressió de les noves bases en funció de la base cartesiana i realitzeu (de manera superposada i a escala) la seva representació gràfica.

$p = x + xy$

$q = -xy$ ⇝ canvi invers $x = p + q$

$y = -\frac{q}{x} = -\frac{q}{p+q}$



$\frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)} = (a^{i'}_{\ i}) = \begin{pmatrix} 1+y & x \\ -y & -x \end{pmatrix}$ ⇝ lectura per columnes $\begin{cases} \partial_x = (1+y)\partial_p - y\,\partial_q \\ \partial_y = x\,\partial_p - x\,\partial_q \end{cases}$, per a tots els canvis de base, de manera que els canvis de components dels vectors (i covectors) es fan sempre en la forma $(\ )(\ ) = (\ )$

A partir del canvi de coord. resulta directe expressar $dp = (1+y)\,dx + x\,dy$, $dq = -y\,dx - x\,dy$ ⇝ $(a_i^{\ i'}) = \begin{pmatrix} 1+y & -y \\ x & -x \end{pmatrix}$

A partir de l'expressió cartesiana de la base $\{dp, dq\}$ podem obtenir la mètrica 2-contravariant $(g^{i'j'}) = \begin{pmatrix} dp\cdot dp & dp\cdot dq \\ dq\cdot dp & dq\cdot dq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2+2y+1 & -x^2-y^2-y \\ -x^2-y^2-y & x^2+y^2 \end{pmatrix}$

· producte escalar que el fem en cartesianes

que, en forma tensorial completa s'expressa

$$g^2 = g^{i'j'}\,\partial_{x^{i'}} \otimes \partial_{x^{j'}} = (x^2+y^2+2y+1)\,\partial_p\otimes\partial_p - (x^2+y^2+y)(\partial_p\otimes\partial_q + \partial_q\otimes\partial_p) + (x^2+y^2)\,\partial_q\otimes\partial_q$$

La jacobiana $\frac{\partial(x,y)}{\partial(p,q)}$, en cartesianes, s'obté invertint matricialment la $\frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)}$

Com $|a^{i'}_{\ i}| = -x$ tenim $\frac{\partial(x,y)}{\partial(p,q)} = (a^i_{\ i'}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x} & -\frac{1+y}{x} \end{pmatrix}$ "a la pràctica convé comprovar que hem obtingut la inversa amb tots els signes correctes!".

Tindrem ara, llegint-la per columnes

$\partial_p = \partial_x - \frac{y}{x}\,\partial_y$

$\partial_q = \partial_x - \frac{1+y}{x}\,\partial_y$, d'on obtenim la mètrica 2-covariant $(g_{i'j'}) = \begin{pmatrix} \partial_p\cdot\partial_p & \partial_p\cdot\partial_q \\ \partial_q\cdot\partial_p & \partial_q\cdot\partial_q \end{pmatrix} =$ o també per inversió de la matriu $(g^{i'j'})$

$$= \frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} x^2+y^2 & x^2+y^2+y \\ x^2+y^2+y & x^2+y^2+2y+1 \end{pmatrix}$$

En forma tensorial completa tenim

$$g_2 = dx\otimes dx + dy\otimes dy = \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) dp\otimes dp + \left(1+\frac{y(1+y)}{x^2}\right)(dp\otimes dq + dq\otimes dp) + \left(1+\frac{(1+y)^2}{x^2}\right) dq\otimes dq$$

$(a_{i'}^{\ i}) = (a^i_{\ i'})^T$ $dx = dp + dq$ que és el darrer canvi de base demanat que faltava

lectura per columnes ⇝ lectura per files $dy = -\frac{1}{x}\left(y\,dp + (1+y)\,dq\right)$

$\partial_p = \partial_x - \partial_y$ $dp = 2dx + dy$

$\partial_q = \partial_x - 2\partial_y$ $dq = -dx - dy$

c) En el punt $x=1$ $y=1$ $(g_{i'j'}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; $(g^{i'j'}) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Representació gràfica demanada a la part superior esquerra.

• Full amb càlculs addicionals emprat en la correcció dels exercicis que no han seguit la indicació d'expressar totes les components en coordenades cartesianes. •

$$x = p+q \qquad dx = dp+dq$$

$$y = -\frac{q}{p+q} \qquad dy = \frac{q}{(p+q)^2}\,dp - dq\left(\frac{1}{p+q} - \frac{q}{(p+q)^2}\right) = \frac{q}{(p+q)^2}\,dp - \frac{p\,dq}{(p+q)^2}$$

$$dx^2 + dy^2 = dp^2\left(1 + \frac{q^2}{(p+q)^4}\right) + dq^2\left(1 + \frac{p^2}{(p+q)^4}\right) + 2dp\,dq\left(1 - \frac{pq}{(p+q)^4}\right)$$

$$\rightsquigarrow (g_{ij}) = \frac{1}{(p+q)^4}\begin{pmatrix} q^2+(p+q)^4 & -pq+(p+q)^4 \\ -pq+(p+q)^4 & p^2+(p+q)^4 \end{pmatrix} = \frac{1}{(p+q)^4}\begin{pmatrix} q^2 & -pq \\ -pq & p^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^4}\begin{pmatrix} x^2y^2 & x^2y(1+y) \\ x^2y(1+y) & x^2(1+y)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{y^2}{x^2} & 1+\frac{y(1+y)}{x^2} \\ \frac{x^2+y^2+y}{x^2} & 1+\frac{(1+y)^2}{x^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^2+y^2 & x^2+y^2+y \\ x^2+y^2+y & x^2+y^2+2y+1 \end{pmatrix}\frac{1}{x^2}$$

$$\partial_x = (1+y)\partial_p - y\partial_q = \left(1 - \frac{q}{p+q}\right)\partial_p + \frac{q}{p+q}\partial_q = \frac{1}{p+q}(p\partial_p + q\partial_q) = \partial_x$$

$$\partial_y = x(\partial_p - \partial_q) = (p+q)(\partial_p - \partial_q) = \partial_y$$

$$g^2 = \partial_x \otimes \partial_x + \partial_y \otimes \partial_y = \partial_p \otimes \partial_p\left[(p+q)^2 + \frac{p^2}{(p+q)^2}\right] + \partial_q \otimes \partial_q\left[(p+q)^2 + \frac{q^2}{(p+q)^2}\right] +$$

$$+ (\partial_p \otimes \partial_q + \partial_q \otimes \partial_p)\left(\frac{pq}{(p+q)^2} - (p+q)^2\right)$$

$$\rightsquigarrow (g^{ij}) = (p+q)^2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} p^2 & pq \\ pq & q^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(p+q)^2}\begin{pmatrix} p^2+(p+q)^4 & pq-(p+q)^4 \\ pq-(p+q)^4 & q^2+(p+q)^4 \end{pmatrix}$$

$$g_{i'j'} = a_{i'}^{\ i}\, g_{ij}\, a^j_{\ j'} \rightsquigarrow g_2 = \begin{pmatrix} 1 & -y/x \\ 1 & -\frac{1+y}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -y/x & -\frac{1+y}{x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{q}{(p+q)^2} \\ 1 & -\frac{p}{(p+q)^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{q}{(p+q)^2} & -\frac{p}{(p+q)^2} \end{pmatrix}$$

$$\partial_p = \partial_x - \frac{y}{x}\partial_y = \partial_x + \frac{q}{(p+q)^2}\partial_y$$

$$\partial_q = \partial_x - \frac{p}{(p+q)^2}\partial_y$$

$$g^{i'j'} = a^{i'}_{\ i}\, \delta^{ij}\, a_j^{\ j'} \rightsquigarrow g^2 = \begin{pmatrix} 1+y & x \\ -y & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+y & -y \\ x & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/(p+q) & p+q \\ +q/(p+q) & -(p+q) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p/(p+q) & +q/(p+q) \\ p+q & -(p+q) \end{pmatrix}$$

ASSIGNATURA: Mètodes Matemàtics de la Física II - A.C. Probabilitat
DEPARTAMENT: Física Fonamental
DATA EXAMEN: 25 – gener – 2010

1. *(0.6 punts)* Caracteritzeu els espais de probabilitat corresponents a la distribució de 4 partícules en vuit cel·les distingibles i equiprobables d'acord amb les diferents estadístiques a) Maxwell-Boltzmann (partícules distingibles), b) Bose-Einstein (partícules indistingibles), c) Fermi-Dirac (partícules indistingibles sotmeses al principi d'exclusió). Calculeu, per a cada cas, la probabilitat que les dues primeres cel:les quedin buïdes.

2 *(1.4 punts)*

(a) Determineu les funcions densitat de probabilitat i de distribució (acumulativa) per a la variable aleatòria $Z = 0.6X + 0.4Y$ on X corresponent a un nombre a l'atzar triat del conjunt discret $\{-1, 0, 1\}$ i Y a un nombre real triat a l'atzar a l'interval (-1,1)independentment del valor d' X.

(b) Representeu gràficament les esmentades funcions $f(x), F(x)$.

(c) Calculeu els quatre primers cumulants, la desviació típica i la curtosi de la variable Z.

(d) Si $U = \frac{1}{100}\Sigma_{i=1}^{100} Z_i$ amb les Z_i independents i equidistribuïdes amb Z, determineu la probabilitat que $|U| \leq 0.01$

1) 4 partícules 8 cel·les : # elements d'Ω ; P(2 primeres quedin buides) $= \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos totals}}$, espais d'equiprobabilitat

MB : $8^4 = 4096$ | $1296 = 6^4/8^4 = 3^4/4^4 = 0.3164$

BE $\binom{11}{4} = \dfrac{11.10.9.\cancel{8}}{\cancel{4}.3.\cancel{2}} = 330$ | $\binom{9}{4} = \dfrac{9.8.7.6}{4.3.2} = 126$ $\quad 126/330 = 0.38\hat{1}\hat{8}$

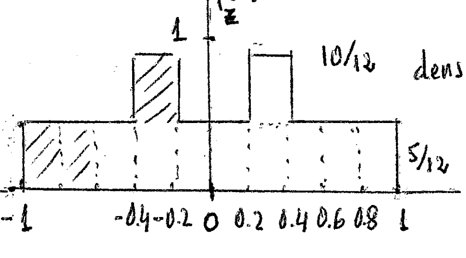
FD $\binom{8}{4} = \dfrac{\cancel{8}.7.6.5}{\cancel{4}.3.\cancel{2}} = 70$ | $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$ $\quad 15/70 = 0.2143$

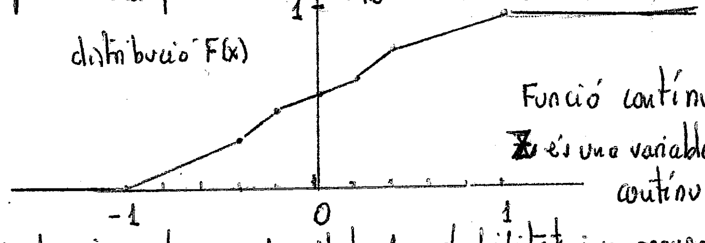
2)

a) $1/3$ dels cops que realitzem l'experiment d'obtenir un valor per a Z la X haurà "sortit" -1 i, per tant $Z = -0.6 + 0.4 \cdot$ nombre distribuït uniformement entre -1 i 1. Per tant Z quedarà distribuïda uniformement a l'interval $(-1, -0.2)$ amb una mesura de probabilitat $1/3$. $\underbrace{\boxed{1/3 \text{ àrea}}}_{4/5 \text{ base}}$ $f_Z(x) = k$ $\quad k = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{12}$ de densitat.

Per a $X = 0$ tindrem una mesura $1/3$ distribuïda uniformement a $(-0.4, 0.4)$
Els casos amb $X = 1$ aportaran una mesura $1/3$ distribuïda unif a $(0.2, 1)$. Per tant tenim zones on es solapen resultats provinents de dues contribucions d'X diferents amb densitat $\frac{10}{12}$ i zones amb densitat $\frac{5}{12}$. En totes elles la funció de distribució F(x) creix linealment, com correspon a una densitat uniforme.

b) cada "maó" correspon a una probabilitat $5/12 \times 0.2 = 1/12$ $\quad$ 12 "maons" per la unitat





Funció contínua
Z és una variable aleatòria contínua, que es descriu amb una densitat de probabilitat i no requereix δ_{z_i}

c) $Z = aX + bY$ X, Y independents $\boxed{\text{rang } Z : (-1, 1)}$

$\varphi_Z(t) = \langle e^{itz} \rangle = \langle e^{itax} e^{itby} \rangle = \varphi_X(at)\, \varphi_Y(bt)$

$\psi_Z(t) = \psi_X(at) + \psi_Y(bt)$ $k_r(Z) = a^r k_r(X) + b^r k_r(Y)$

$X: \frac{1}{3}(\delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1)$ $a = 0.6 = 3/5$

$Y: f(y) = 1/2,\ y \in (-1, 1)$ $a = 0.4 = 2/5$

	k_1	$k_2 = m_2$	$k_3 = 0$	$k_4 = m_4 - 3m_2^2$
X	0	$2/3$	$m_4 = 2/3$	$2/3 - 3\cdot 4/9 = 2/3 - 4/3 = -2/3 = k_4$
Y	0	$\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^1 y^2\,dy = 1/3$	$m_4 = \frac{1}{2}\, 2\int_0^1 y^4\,dy = \frac{1}{5}$	$k_4 = \frac{1}{5} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{15}$
Z	0	$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{25} + \frac{4}{75} = \frac{22}{75} = 0.293$		$k_4(Z) = \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{2}{15}\right) = -\frac{30+4}{75} = -\frac{34}{75}$

$\sigma = \sqrt{\frac{22}{75}} \simeq 0.5416$

$\gamma_a = 0$ $\gamma_e = -\frac{34}{75} \cdot \frac{75^2}{22^2} = -\frac{34 \cdot 75}{22^2} = -5.2686$

d)

$\text{Prob}\left| \sum_{i=1}^{100} \frac{Z_i}{100} \right| < 0.1$ $\sigma^2(U) = 100\, \sigma^2\left(\frac{Z_i}{100}\right) = 100 \cdot \frac{\sigma^2(Z_i)}{(100)^2} = \frac{\sigma^2(Z_1)}{100}$

o directament $\sigma(U) = \frac{1}{10}\, 0.5416 = 0.05416$

$|\hat{U}_M| = 1.8464$ $F_{N}(\hat{u}) \simeq 0.9675$

$P = 0.9675 - 0.0325 = 0.935$ $\boxed{93.5\ \%}$