Assignatura: Mètodes Matemàtics de la Física II
Departament: Física Fonamental
Data Examen: 13 – juny – 2006

1. *(3 punts)* Una equació integral és una equació en la qual la funció incògnita està sota el signe de la integral. Hi ha molts tipus d'equacions integrals i molts mètodes diferents per a resoldre-les. A continuació us proposem resoldre'n dues amb mètodes relacionats amb el contingut del curs.

(a) Resoleu mitjançant transformades de Laplace:

$$\phi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\phi(t)dt$$

(b) Resoleu fent ús dels polinomis de Legendre (suposeu $\phi(x) = \sum a_n P_n(x)$ i $x = \sum b_n P_n(x)$):

$$\phi(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (x+t)\phi(t)dt$$

2. *(3 punts)* Transformeu l'equació diferencial en derivades parcials

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad u = u(x,t), \quad c = constant$$

en una equació a coeficients constants mitjançant el canvi $x = e^z$. A continuació, resoleu l'equació resultant pel mètode de separació de variables. Trobeu la solució $u(x,t)$, periòdica en t, i que satisfà les condicions de contorn

$$u(l,t) = 0, \quad u(2l,t) = 0 \quad \forall t$$

3. *(0.5 punts)* Amb un simulador pseudoaleatori hem obtingut 200 dades que suposadament corresponen a una distribució exponencial de paràmetre $\lambda = 1$. Les hem agrupat en 10 regions teòricament equiprobables de manera que les freqüències respectives han estat 24, 24, 17, 23, 14, 16, 22, 18, 19, 23. Fins a quins nivells de significació especificats a les taules de chi-quadrat podem acceptar o refusar la hipòtesi? Podeu, fins a 3 xifres decimals, precisar els 9 valors que delimiten les 10 zones d'agrupament? (indicació: en aquest problema us resultarà més senzill utilitzar l'expressió original no simplificada de la mesura chi-quadrat de la discrepància)

4. *(1.5 punts)* La variable aleatòria $Z = X + Y$ és suma d'una variable de Poisson X i d'una variable exponencial Y, independents i amb la mateixa mitjana m.

(a) Determineu la desviació típica, i els paràmetres d'asimetria i curtosi de Z.

(b) Tendeix Z a una distribució normal en el límit $m \to \infty$? Justifiqueu la resposta.

(c) Considereu la variable aleatòria V que és suma de 500 variables independents del tipus Z anterior, amb $m = 1$. Pot considerar-se V aproximadament normal i/o de Poisson? Justifiqueu la resposta i calculeu la probabilitat del resultat $V \in (1000, 1025)$

5. *(1 punt)* Un camp tensorial '(2-contravariant)' de segon ordre té per matriu de components esfèriques físiques

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determineu la seva matriu en coordenades i base cartesianes sobre la línia $\theta = \phi = \pi/4$. A efectes de comprovació la solució aproximada és:((-0.457,0.25,-0.854),(0.25,0.957,0.146),(0.854,-0.146,-0.5)).

(b) Determineu l'expressió completa (no matricial) en bases esfèriques holònomes o naturals dels tensors (1-covariant 1-contravariant) i 2-covariant que són mètricament associats al camp T.

6. *(1 punt)* A l'espai de Minkowski de tensor mètric $g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ tenim un camp magnètic donat pel tensor de Faraday $F = B_z(t,x,y,z)(\partial x \otimes dy - \partial y \otimes dx)$.

(a) Construïu les matrius dels tensors $F_{\mu\nu}$ *i* $F^{\mu\nu}$.

(b) Determineu matricialment les components $F^{\mu'}{}_{\nu'}$ en el sistema de coordenades definit per la transformació de Lorentz $t' = t\cosh\xi - x\sinh\xi$, $x' = -t\sinh\xi + x\cosh\xi$, $y' = y$, $z' = z$. Comenteu, en dues línies, el resultat.

P1 a) $\phi(x) = \sin x + 2 \underbrace{\int_0^x \cos(x-t)\, \phi(t)\, dt}_{}$

$\cos(x) * \phi(x)$

producte de convolució

Transformem Laplace

$F(s) = \mathcal{L}\{\phi(x)\}$

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} + 2F(s)\frac{s}{s^2+1}$$

$$(s^2+1)F(s) = 1 + 2sF(s) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2-2s+1} = \frac{1}{(s-1)^2}$$

Antitransformem $\boxed{\phi(x) = x e^x}$

P1 b) $\phi(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x+t)\,\phi(t)\,dt$

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(x) \Rightarrow x = P_1(x)$$

La integral $\int_{-1}^{1}(x+t)\phi(t)dt = \int_{-1}^{1} x\,\phi(t)dt + \int_{-1}^{1} t\,\phi(t)dt$

$$= x\sum a_n \underbrace{\int_{-1}^{1} P_n(t)dt}_{\substack{\| \\ \underbrace{\int_{-1}^{1} P_0(t)P_n(t)dt}_{\substack{\| \\ \frac{2}{2\cdot 0+1}\delta_{n,0}}}}} + \sum a_n \underbrace{\int_{-1}^{1} P_1(t)P_n(t)dt}_{\frac{2}{2\cdot 1+1}\delta_{n,1}}$$

$$= x\, 2a_0 + \frac{2}{3}a_1$$

$$\Rightarrow \phi(x) = x + \frac{1}{2}\left(2a_0x + \frac{2}{3}a_1\right) = x + a_0x + \frac{1}{3}a_1$$

i com $\phi(x) = \sum a_n P_n(x)$ només fins ordre 1

$$= a_0 + a_1 x$$

$$a_0 + a_1x = x + a_0x + \frac{1}{3}a_1 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1/3\, a_1 \\ a_1 = 1 + a_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_0 = 1/2,\quad a_1 = 3/2$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{2}P_1(x)}$$

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{1}{c^2}}_{c = cte} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$; Cambio $x = e^z$; $z = \ln x$

Tenemos que pasar de $\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial z}$; $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt$

$u(x,t) \to u(z,t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)_t = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{1}{x} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}\cdots$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{x}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}_{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial z}.$$

La ec. dif. en ∂ para $u(z,t)$ queda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t}$$ [Ec. dif. en ∂ respect z, t de coef. ctes $u(z,t)$]

Separación de variables $u(z,t) \overset{\text{hip.}}{=} Z(z)T(t)$

$$T(t)\left[\frac{d^2Z}{dz^2} - \frac{dZ}{dz}\right] = \frac{Z(z)}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{Z''}{Z} - \frac{Z'}{Z}}_{\varphi(z)} = \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}}_{f(t)} = \lambda$$

$\varphi(z) = f(t) \Rightarrow$ cte $\forall x, t$

$Z''(z) - Z'(z) - \lambda Z(z) = 0$; $Z(z) \sim e^{mz}$; $m^2 - m - \lambda = 0$

$T''(t) - \lambda c^2 T(t) = 0$ $\qquad m = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}$

$\left.\begin{array}{l} T(t) \sim e^{pt} \\ T''(t) \sim p^2 e^{pt}\end{array}\right\}$ $p^2 - \lambda c^2 = 0$

$p^2 = \lambda c^2$; $p = \pm c\sqrt{\lambda}$ $\qquad \boxed{T(t) = Ae^{c\sqrt{\lambda}t} + Be^{-c\sqrt{\lambda}t}}$

Para $Z(z) = Ce^{\frac{1}{2}z}e^{\frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda}\,z} + De^{\frac{1}{2}z}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda}\,z}$

Si la solución ha de ser periódica en t, $\lambda < 0$, hagamos $\lambda = -\omega^2$ $(\omega > 0)$;

Entonces $p = \pm c\sqrt{-\omega^2} = \pm c\sqrt{i^2\omega^2} = \pm ic\omega \to$ $T(t) = A\cos c\omega t + B\operatorname{sen} c\omega t$!

$u = u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$\left.\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= x^2 T(t) \frac{d^2X}{dx^2} \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{X(x)}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2} \end{aligned}\right\} \text{ div por } X(x)T(t)$$

$$\left.\begin{aligned} \underbrace{\frac{x^2}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}}_{\varphi(x)} &= \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T}{dt^2}}_{f(t)} \\ \forall x,t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ cte!!

$$\frac{x^2}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = \lambda \Rightarrow x^2\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda X(x) = 0$$

$$\frac{1}{c^2T(t)}\frac{d^2T}{dt^2} = \lambda \Rightarrow \frac{d^2T}{dt^2} - \lambda c^2 T(t) = 0$$

En el intervalo $(l, 2l)$ es un problema SL regular (con la cond. contorno, $X(l)=0$, $X(2l)=0$

$\triangleright$ (ec. Euler?) $\quad X \sim x^p$, $\quad X' \sim p x^{p-1}$, $\quad X'' \sim p(p-1)x^{p-2}$

$$x^2 p(p-1)x^{p-2} - \lambda x^p = 0$$

$$p(p-1) - \lambda = 0$$

$$p^2 - p - \lambda = 0$$

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2} <$$

$$X(x) = A\, x^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4\lambda}}{2}} + B\, x^{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1+4\lambda}}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} T &\sim e^{pt} \\ T' &\sim p e^{pt} \\ T'' &\sim p^2 e^{pt} \end{aligned}\right\} \quad p^2 - \lambda c^2 = 0 \Rightarrow p^2 = \lambda c^2;\quad p = \pm c\sqrt{\lambda}$$

$$T(t) = C e^{+c\sqrt{\lambda}\, t} + D e^{-c\sqrt{\lambda}\, t}$$

Para que sea periódica en $t \to$ exp. complejas. $\lambda = -\omega^2$ y por lo tanto $\sqrt{\lambda} = \sqrt{i^2\omega^2} = i\omega$

$$T(t) = Ce^{i\omega ct} + De^{-i\omega ct} = C(\operatorname{sen}\omega ct + D\cos\omega ct)$$

Entonces

$$\sqrt{1+4\lambda} = \sqrt{1-4\omega^2}$$

$$X(x) = x^{1/2}\left[A\, x^{\frac{\sqrt{1-4\omega^2}}{2}} + B\, x^{-\frac{\sqrt{1-4\omega^2}}{2}}\right]$$

$$X(l) = 0 = l^{1/2}\left[A\, l^{\frac{\sqrt{1-4\omega^2}}{2}} + B\, l^{-\frac{\sqrt{1-4\omega^2}}{2}}\right]$$

$$X(2l) = 0 = (2l)^{1/2}\left[A\, (2l)^{\frac{\sqrt{1-4\omega^2}}{2}} + B\, (2l)^{-\frac{\sqrt{1-4\omega^2}}{2}}\right]$$

cond. $\exists$ sol diferente trivial $A=B=0$

det coef $=0$

$$X(x) = x^{1/2}\left[A\,x^{\frac{1}{2}\sqrt{1-4\omega^2}} + B\,x^{-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\omega^2}}\right]$$

Si $J = \frac{1}{2}\sqrt{1-4\omega^2}$; $\quad X(x) = x^{1/2}\left[A x^{J} + B x^{-J}\right]$

$$X(l) = 0 = l^{1/2}\left[A\,l^{J} + B\,l^{-J}\right]$$
$$X(2l) = 0 = (2l)^{1/2}\left[A\,(2l)^{J} + B\,(2l)^{-J}\right]$$

sol trivial $A=B=0$; sol dif trivial det coef $=0$

$$\begin{vmatrix} l^{J} & l^{-J} \\ (2l)^{J} & (2l)^{-J} \end{vmatrix} = 0$$

$$l^{J}(2l)^{-J} - l^{-J}(2l)^{J} = 0$$

$$\cancel{l^{J}}\,2^{-J}\cancel{l^{-J}} - \cancel{l^{-J}}\,2^{J}\cancel{l^{J}} = 0, \quad 2^{-J} - 2^{J} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2^{-J} = 2^{J} \Rightarrow \boxed{2^{2J} = 1}$$

$2J\ln 2 = 0$

$e^{2J\ln 2} = 1$; $\boxed{e^{2J\ln 2} = 1}$

det. raíz de la unidad

$2J\ln 2 = a+bi$

$e^{a+bi} = e^{a}\left[\cos b + i\,\mathrm{sen}\,b\right] = 1$ < $a=0$; $\left\{\begin{matrix}\cos b = 1\\ \mathrm{sen}\,b = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow b = 2\pi n$

En principio $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$\cancel{2}J\ln 2 = \cancel{2}\pi n i \;; \quad J = \frac{\pi n}{\ln 2}\, i$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-4\omega^2} = \frac{\pi n}{\ln 2}\, i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{4}\left(1-4\omega^2\right) = -\frac{n^2\pi^2}{(\ln 2)^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \omega^2 = \left[\frac{n^2\pi^2}{(\ln 2)^2} + \frac{1}{4}\right]$$

P.3. 10 regions equiprobables $\Rightarrow$ $p_i = \frac{1}{10}$ $\quad > \; np_i = 20$

200 dades $= n$

$$\chi^2 \text{ (9 graus de llibertat)} = \sum_{i=1}^{10} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{10} (f_i - 20)^2 =$$

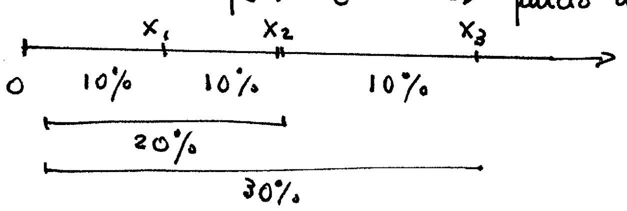
$$= \frac{1}{20}\left(4^2+4^2+3^2+3^2+6^2+4^2+2^2+2^2+1+3^2\right) = \frac{120}{20} = 6$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i^2}{p_i} - n = \frac{1}{20}\left(24^2+24^2+\dots\right) - 200$$ (més laboriós en aquest cas)

Schaum χ^2 9 graus de llibertat $\quad \chi^2_{0.25} = 5.90 \quad \chi^2_{0.50} = 8.34$

La hipòtesi és refusada a un nivell de significació del 75 % però passa el test aplicat a un nivell de significació del 50 %

b) La variable exponencial de paràmetre $\lambda = 1$ està distribuïda a l'interval $(0, \infty)$ amb densitat $f(x) = e^{-x}$ $\Rightarrow$ funció de distribució $F(x) = \int_0^x e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x}$



Ens interessen, per les 10 regions equiprobables els valors de x tals que $F(x) = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$

Ja sabem $F(0) = 0 \quad F(\infty) = 1$

$F(x_n) = 1 - e^{-x_n} = 0.n$ $\leftarrow$ notació peculiar autoexplicada

$e^{-x_n} = 1 - 0.n \qquad x_n = -\ln(1 - 0.n) \qquad x_1 = -\ln(0.9) = 0.105$

$x_2 = -\ln(0.8) = 0.223$

$x_3 = -\ln(0.7) = 0.357 \qquad x_4 = -\ln(0.6) = 0.511 \qquad x_5 = -\ln(0.5) = 0.693$

$x_6 = -\ln(0.4) = 0.916 \qquad x_7 = -\ln(0.3) = 1.204 \qquad x_8 = -\ln(0.2) = 1.609$

$x_9 = -\ln(0.1) = 2.303$

P.4. a) X Poisson de paràmetre = mitjana = m $\qquad k_r(X) = m \quad \forall m$

Y exponencial de mitjana m : Ens interessen els seus cumulants ja que volem sumar-la a la variable X

"Repetició apunts": $f(x) = \alpha e^{-\lambda x}$, $1 = \int_0^\infty \alpha e^{-\lambda x}\,dx = \alpha \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x}\Big]_0^\infty = \frac{\alpha}{\lambda} \Rightarrow \alpha = \lambda$

$$m_r = \int_0^\infty \lambda x^r e^{-\lambda x}\,dx \underset{\text{Schaum}}{=} \lambda \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^{n+1}} \underset{\text{Schaum}}{=} \frac{n!}{\lambda^n} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{\lambda} \quad m_2 = \frac{2}{\lambda^2} \quad m_3 = \frac{6}{\lambda^3} \quad m_4 = \frac{24}{\lambda^4}$$

$\rightarrow k_1 = \frac{1}{\lambda} \qquad k_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$; $k_3 = m_3 - m_2 m_1 \cdot 3 + 2m_1^3 = \frac{1}{\lambda^3}(6 - 6 + 2) =$

$k_3 = \frac{2}{\lambda^3} \qquad k_4 = m_4 \dots = \frac{6}{\lambda^4}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{A "memoritzar" és suficient} \\ m = k_1 = \frac{1}{\lambda} \quad \sigma = \frac{1}{\lambda} \quad \gamma_a = 2 \quad \gamma_c = 6\end{array}}$$

Comença el problema, pròpiament dit

		k_1	k_2	k_3	k_4
X	enunciat	m	m	m	m
Y		m	m^2	$2m^3$	$6m^4$
$Z = X+Y$		$2m$	m^2+m	$2m^3+m$	$6m^4+m$

(paràmetre de Poisson és m)

(paràmetre de l'exponencial és $\lambda = \frac{1}{m}$)

$$m_1(Z) = 2m \qquad \sigma(Z) = \sqrt{m^2+m} \qquad \gamma_a(Z) = \frac{2m^3+m}{(m^2+m)^{3/2}} \qquad \gamma_c(Z) = \frac{6m^4+m}{(m^2+m)^2}$$

b) Per a $m \to \infty$ $\quad \gamma_a(Z) = \frac{2m^3+\cdots}{m^3+\cdots} \to 2 \qquad \gamma_c(Z) = \frac{6m^4+\cdots}{m^4+\cdots} \to 6$

L'asimetria i la curtosi no tendeixen a zero (de fet es mantenen en els mateixos valors que l'exponencial) i per tant $Z(m) \underset{m\to\infty}{\not\longrightarrow}$ normal

Tampoc tendeix a una exponencial ja que $k_2 = m^2+m \neq 4m^2 = k_1^2$

c) $V = \sum_{i=1}^{500} Z_i$ amb $k_1(Z_i) = 2 \quad k_2(Z_i) = 2 \quad k_3(Z_i) = 3 \quad k_4(Z_i) = 7$

fent $m=1$ als resultats de l'apartat a)

Multiplicant els cumulants per 500 (els termes de la suma) tenim:

$$k_1(V) = 1000 \qquad k_2(V) = 1000 \qquad k_3(V) = 1500 \qquad k_4(V) = 3500$$

$$\sigma(V) = \sqrt{1000} \qquad \gamma_a(V) = \frac{1500}{(1000)^{3/2}} = 0.047 \qquad \gamma_c(V) = \frac{3500}{10^6} = 0.0035$$

Encara que V té els dos primers cumulants iguals no és pròxima a una Poisson ja que el tercer i quart creixen considerablement. En canvi sí s'aproxima molt bé a una normal (T.L.C) ja que $\gamma_a(V)$ i $\gamma_c(V)$ són molt petits.

Per tant, usant l'aproximació normal:

$1000 \to 0$ $\qquad$ fer$(0) = 0.5$

$1025 \to \frac{1025-1000}{\sqrt{1000}} = 0.7906$ $\qquad$ fer$(0.7906) = 0.7852 + 0.06 \times 0.029 = 0.7854$

(tipificació) $\qquad$ Schaum $\qquad$ interpolació irrellevant pràcticament negligible

$$\text{Prob}(V \in (1000, 1025)) = 0.7854 - 0.5 = 0.2854 \simeq 28.5\%$$

No procedeix aquí aplicar la correcció de continuïtat ja que V no és una variable discreta (les 500 Y_i són variables exponencials continues).

$$T\,(\text{esfèriques físiques}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$, mètrica euclídea

'2 contravariant' perquè el prenguem com a t^{ij} encara que en bases físiques (ortonormals !!) tots els tensors mètricament associats tenen les matrius components

$$T = e_r \otimes e_\theta + e_\theta \otimes e_\varphi + e_\varphi \otimes e_r$$

(punt de partida del 2on apartat).

a) $$t^{ij}_{\text{(cart.)}}(x) = a^i{}_{k'}\, a^j{}_{l'}\, t^{k'l'}_{\text{(esf. fís.)}} = a^i{}_{k'}\, t^{k'l'}\, a^j{}_{l'}$$ → caldrà col·locar la transposta

La matriu $(a^i{}_{k'})$ és la que per columnes dóna la esfèrica física en funció de la base cartesiana. Però la base contravariant esfèrica-física és la base natural $\partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi$ donada per la Jacobiana $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$, normalitzada.

Per tant: $x = r\, s_\theta c_\varphi$, $y = r\, s_\theta s_\varphi$, $z = r\, c_\theta$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} s_\theta c_\varphi & r c_\theta c_\varphi & -r s_\theta s_\varphi \\ s_\theta s_\varphi & r c_\theta s_\varphi & r s_\theta c_\varphi \\ c_\theta & -r s_\theta & 0 \end{pmatrix}$$

components de $\partial_r \uparrow$ $\partial_\theta \uparrow$ $\partial_\varphi \uparrow$

$$(a^i{}_{k'}) = \begin{pmatrix} s_\theta c_\varphi & c_\theta c_\varphi & -s_\varphi \\ s_\theta s_\varphi & c_\theta s_\varphi & c_\varphi \\ c_\theta & -s_\theta & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\theta=\varphi=\pi/4]{} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

components cartesianes de "e_r" "e_θ" "e_φ" $s_\theta = c_\theta = s_\varphi = c_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(matriu de rotació, ortogonal, inversa = transposta)

T (cartesianes) $\forall$ punt amb $\theta = \varphi = \pi/4$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{transposada}} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-2\sqrt{2} & 1 & -2-\sqrt{2} \\ 1 & 1+2\sqrt{2} & -\sqrt{2}+2 \\ 2+\sqrt{2} & \sqrt{2}-2 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.457\ldots \\ 0.25\ldots \\ 0.853\ldots \end{pmatrix}$$

comprovació numèrica a l'enunciat

b) Sempre en esfèriques les associacions mètriques contravariant-covariant són:

$$e_r = \partial_r \sim dr = e^r \qquad e_\theta = \frac{\partial_\theta}{r} \sim e^\theta = r\,d\theta \qquad e_\varphi = \frac{\partial_\varphi}{r \sin\theta} \sim e^\varphi = r \sin\theta\, d\varphi$$

Per substitució directa tenim:

$$T = e_r \otimes e_\theta + e_\theta \otimes e_\varphi + e_\varphi \otimes e_r \sim dr \otimes \frac{\partial_\theta}{r} + r\,d\theta \otimes \frac{\partial_\varphi}{r\sin\theta} + r\sin\theta\, d\varphi \otimes \partial_r$$

$$\sim dr \otimes r\,d\theta + r\,d\theta \otimes r\sin\theta\, d\varphi + r\sin\theta\, d\varphi \otimes dr$$

matricialment $$\left(t_i{}^j \,(\text{holònomes o naturals})\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sin\theta \\ r\sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(t_{ij}\,(\text{hol.})\right) = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin\theta \\ r\sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(matrius que representen "essencialment" el mateix camp físic "T" i que poden obtenir-se mitjançant productes matricials amb matrius diagonals de "canvi de norma de les bases")

a) $(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix} = (g^{\mu\nu})$; $F = (F^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&B_z&0\\0&-B_z&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ P.6.

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma}F^{\sigma}{}_{\nu} = \begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&B_z&0\\0&-B_z&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \text{mateixa matriu}$$

en fer el prod. canviarà el signe de la 1ª fila ⇒ en aquest cas no fa res ja que la 1ª fila és nul·la

$$F^{\mu\nu} = F^{\mu}{}_{\sigma}\,g^{\sigma\nu} = (\text{mateixa matriu})\begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix} = \text{mateixa matriu.}$$

en fer el prod. canvia el signe 1ª columna → tampoc fa res

En la mètrica de Minkowski escollida la part magnètica (espai-espai) del tensor de Faraday és la mateixa per a les quatre formes mètricament associades. No és així per al camp elèctric que es disposa en la part no diagonal de la 1ª fila i columna.

b) $$F^{\mu'}{}_{\nu'}(x') = F^{\mu}{}_{\nu}(x)\,\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\,F^{\mu}{}_{\nu}(x)\,\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}$$

Jacobiana inversa de l'anterior, corresponent a la transformació inversa: $\xi \to -\xi$

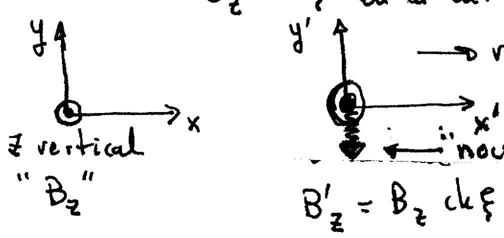
és a dir $\operatorname{ch}\xi \to \operatorname{ch}(-\xi) = \operatorname{ch}\xi$, $\operatorname{sh}\xi \to \operatorname{sh}(-\xi) = -\operatorname{sh}\xi$

$$(F^{\mu'}{}_{\nu'}) = \frac{\partial(t',x',y',z')}{\partial(t,x,y,z)}\,F^{\mu}{}_{\nu}\,\frac{\partial(t,x,y,z)}{\partial(t',x',y',z')} =$$

$$= \begin{pmatrix}\operatorname{ch}\xi & -\operatorname{sh}\xi & 0 & 0\\ -\operatorname{sh}\xi & \operatorname{ch}\xi & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&B_z&0\\0&-B_z&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\xi & \operatorname{sh}\xi & 0 & 0\\ \operatorname{sh}\xi & \operatorname{ch}\xi & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\operatorname{ch}\xi & -\operatorname{sh}\xi & 0 & 0\\ -\operatorname{sh}\xi & \operatorname{ch}\xi & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&B_z&0\\-B_z\operatorname{sh}\xi&-B_z\operatorname{ch}\xi&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&-B_z\operatorname{sh}\xi&0\\0&0&B_z\operatorname{ch}\xi&0\\-B_z\operatorname{sh}\xi&-B_z\operatorname{ch}\xi&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

comentari: la component magnètica en la direcció "$z \sim z'$" s'ha vist incrementada per un factor (de Lorentz) $\gamma = \operatorname{ch}\xi$ alhora que ha "aparegut" un camp elèctric d'intensitat $B_z\operatorname{sh}\xi$ en la direcció negativa ~~de~~ de l'eix $y' \sim y$



→ velocitat $v = c\operatorname{tgh}\xi$

"nou" camp elèctric d'intensitat $B_z\operatorname{sh}\xi$

(E' apareix en la direcció $v \times B$)

(en unitats Gaussianes o en unitats naturals, no en el SI: Tesla per B, Volts/m per E ← factor "c")

En la funció B_z haurem de substituir x,t,...

$$F' = B_z(\operatorname{ch}\xi\, t' + \operatorname{sh}\xi\, x', \operatorname{ch}\xi\, x' + \operatorname{sh}\xi\, t', y', z')\left[\operatorname{ch}\xi\,(\partial_{x'}\otimes dy' - \partial_{y'}\otimes dx') - \operatorname{sh}\xi\,(\partial_{t'}\otimes dy' - \partial_{y'}\otimes dt')\right]$$

Assignatura: Mètodes Matemàtics de la Física II
Departament: Física Fonamental
Data Examen: 16 – gener – 2007

1.A *(2 punts)* Trobeu el conjunt de valors propis i les corresponents funcions pròpies normalitzades a la unitat del següent problema de Sturm-Liouville:

$$x\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) + y = -\lambda y, \quad x \in [1, e]\,, \quad y(1) = y(e) = 0.$$

1.B *(1 punt)* Considereu la següent equació diferencial no homogènia:

$$\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, e]\,, \quad y(1) = y(e) = 0.$$

Trobeu-ne la solució en forma de sèrie de Fourier generalitzada, utilitzant com a base les funcions obtingudes a l'apartat anterior.

2.A *(1.5 punts)* Utilitzeu la transformada de Fourier per resoldre l'equació diferencial:

$$y' - 4y = \theta(t)\exp(-4t), \quad \text{on} \quad \theta(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0 \quad \text{i} \quad \theta(t) = 1 \quad \text{si} \quad t \geq 0.$$

2.B *(1.5 punts)* **1.** Trobeu la transformada de Laplace de la funció

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \theta(t - t_0) f(t_0) dt_0, \quad \text{en termes de} \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)].$$

2. Resoleu l'equació diferencial:

$$y' - 4y = \int_0^\infty \theta(t - t_0)\exp(-4t_0) dt_0, \quad \text{amb} \quad y(0) = 0$$

.

3.A *(0.5 punts)* Per posar a prova la bondat d'un dau tetraèdric hem efectuat 100 llançaments amb els resultats *(valor, freqüència)* següents: $\{(1, 20), (2, 24), (3, 26), (4, 30)\}$. Podem considerar estadísticament significativa la discrepància entre el model teòric i els resultats obtinguts? Prosseguim els llançaments fins a completar una sèrie de 1000 i els resultats han estat finalment $\{(1, 200), (2, 240), (3, 260), (4, 300)\}$. Cal repetir el test χ^2? Raona la resposta i actua conseqüentment.

3.B *(1.5 punts)* Una variable aleatòria $Z = X + Y$ és suma d'una variable normal X de variància i mitjana m i d'una variable Poisson Y també de mitjana m.

(a) Determineu la funció cumulant $\psi(t)$, la desviació típica σ, i els paràmetres d'asimetria γ_a i de curtosi γ_c de la variable aleatòria Z.

(b) Considereu la variable aleatòria V que és suma de n variables estadísticament independents del tipus Z anterior. Per a quin valor de n es verifica la condició $\gamma_a \leq 0.01$? Quin és llavors el valor de γ_c?

(c) En el cas particular $m = 1$, quin és el valor de n? Quin és el màxim valor de V que podem esperar obtenir amb un marge de seguretat del 95%?

4.A *(0.5 punts)* Demostreu la relació $(a \times b) \cdot (b \times c) \times (c \times a) = (\epsilon_{ijk} a_i b_j c_k)^2 = (a, b, c)^2$.

4.B *(1.5 punts)* Sobre l'esfera de radi a i tensor mètric $g = a^2\, d\theta \otimes d\theta + a^2 \sin^2\theta\, d\varphi \otimes d\varphi$ prenem com a coordenades $\{z = a\cos\theta, \varphi\}$.

(a) Determineu el tensor mètric 2-covariant i el 2-contravariant en les coordenades $\{z, \varphi\}$.

(b) Comenteu el significat geomètric de les normes dels vectors $\{\partial_z, \partial_\varphi\}$ i dels covectors $\{dz, d\varphi\}$ sobre l'equador de l'esfera i en els punts propers al pol nord.

(c) Expresseu el tensor $T = \cos\theta\,(e_\theta \otimes e_\varphi - e_\varphi \otimes e_\theta)$ en la base física $\{e_z, e_\varphi\}$ corresponent a les noves coordenades. Comenteu, fent servir consideracions geomètriques, el resultat.

PROBLEMA 1

(A) Resolem el problema d'Sturm-Liouville

$$x \frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx} y\right) + y = -\lambda y \quad , \quad x \in [1, e]$$

$$y(1) = y(e) = 0$$

$$x^2 y'' + x y' + (1+\lambda) y = 0$$

$$y \sim x^r$$

$$r^2 + (1+\lambda) = 0 \implies r = \pm i \sqrt{1+\lambda}$$

$$y(x) = A\, x^{i\sqrt{1+\lambda}} + B\, x^{-i\sqrt{1+\lambda}}$$

$$(*) \begin{cases} 0 = A + B \\ 0 = A \exp(i\sqrt{1+\lambda}) + B \exp(-i\sqrt{1+\lambda}) \end{cases}$$

(i) $\lambda \leq -1 \implies 1+\lambda \leq 0 \quad , \quad r = \pm \sqrt{|1+\lambda|}$

$$(*) \longrightarrow 1+\lambda = 0 \implies \lambda = -1$$

$$y(x) = A + B = 0 \quad \text{(solució trivial)}$$

(ii) $\lambda > -1 \implies 1+\lambda > 0$

$$(*) \longrightarrow \sqrt{1+\lambda} = m\pi \quad , \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_m = m^2\pi^2 - 1$$

$$y(x) = A\left(x^{im\pi} - x^{-im\pi}\right) = A\left(e^{im\pi \ln x} - e^{-im\pi \ln x}\right) =$$

$$A \sin(m\pi \ln x)$$

normalització:

$$1 = A^2 \int_1^e \sin^2(m\pi \ln x)\, \frac{dx}{x} = A^2 \int_0^1 \sin^2(m\pi y)\, dy =$$

$$\frac{1}{2} A^2$$

$$y_m = \sqrt{2} \sin(m\pi \ln x)$$

PROBLEMA 1

(B) Per l'equació

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}y\right)+\frac{y}{x}=\frac{1}{x} \quad , \quad x\in[1,e]$$

$$y(1)=y(e)=0$$

Troben la solució en forma de sèrie de Fourier generalitzada

$$y(x)=\sum_{m=1}^{\infty} c_m\sqrt{2}\sin(m\pi\ln x)$$

$$\frac{1}{x}=L(y)=-\sum_{m=1}^{\infty} c_m\lambda_m\sqrt{2}\left[\sin(m\pi\ln x)\right]\frac{1}{x}$$

$$\text{on} \quad L=\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)+\frac{1}{x}$$

$$\lambda_m c_m=\int_1^e\sqrt{2}\sin(m\pi\ln x)\,\frac{dx}{x}=\frac{\sqrt{2}}{m\pi}\left[(-1)^m-1\right]$$

$$c_m=\frac{\sqrt{2}}{m\pi}\,\frac{\left[(-1)^m-1\right]}{m^2\pi^2-1}$$

$$y(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m\pi}\,\frac{\left[(-1)^m-1\right]}{m^2\pi^2-1}\sin(m\pi\ln x)$$

Problema 2

Resolem:

2 (a) mitjançant la transformada de Fourier

$$y' - 4y = u(t)\, e^{-4t}, \quad \text{on} \quad u(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

$-\infty < t < +\infty$

$$\boxed{\hat{y}(\omega) = \mathcal{F}[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \quad \text{(Def. Schaum)}}$$

Llavors

$$\mathcal{F}\{y'\} - 4\,\mathcal{F}\{y\} = \mathcal{F}\{u(t)\, e^{-4t}\}$$

$$\mathcal{F}\{u(t)\, e^{-4t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-4t} e^{-i\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-4t} e^{-i\omega t}\, dt = $$

$$= \frac{1}{4+i\omega}$$

Per tant

$$i\omega\, \hat{y}(\omega) - 4\, \hat{y}(\omega) = \frac{1}{4+i\omega}$$

$$\boxed{y(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{y}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega}$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{(4+i\omega)(-4+i\omega)} = \frac{-1}{16+\omega^2} =$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-1) \frac{e^{i\omega t}}{16+\omega^2}\, d\omega = -\frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega-4i)(\omega+4i)}\, d\omega}_{I}$$

Si $t>0$

$$I = -\frac{e^{-4t}}{8}$$

Si $t<0$

$$I = -\frac{e^{4t}}{8}$$

en resum $y(t) = -\frac{1}{8}\, e^{-|t|4}$

$$F(\omega) = \frac{2C_0 a}{\omega^2 + a^2}; \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = C_0\, e^{-a|t|}$$

$C_0 = -1$,
$a^2 = 16; a = 4$

$$\frac{-1}{16+\omega^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2(-1)\cdot 4}{\omega^2 + a^2}; \quad f(t) = -\frac{1}{8}\, e^{-4|t|}$$

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \theta(t-t_0)\, f(t_0)\, dt_0 \quad , \qquad \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty \theta(t-t_0)\, f(t_0)\, dt_0\right] = \ ?$$

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \theta(t-t_0)\, f(t_0)\, dt_0 = \int_0^t f(t_0)\, dt_0$$

$$\mathcal{L}[\varphi(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t_0)\, dt_0\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Caso especial $\quad f(t_0) = e^{-4t_0}$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-4t_0}\, dt_0\right] = \frac{1}{(s+4)s} \qquad \text{cqd !!}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty \theta(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau \quad !!$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty \theta(t-t_0)\, f(t_0)\, dt_0\right] = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^\infty \theta(t-t_0)\, f(t_0)\, dt_0 =$$

$$= \left[\int_0^\infty dt_0\, f(t_0) \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\, \theta(t-t_0)\, dt}_{\mathcal{L}[\theta(t-t_0)] = \frac{e^{-st_0}}{s}}\right] = \int_0^\infty dt_0\, \frac{e^{-st_0} f(t_0)}{s} =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s} F(s). \qquad \text{cq.d}$$

Otra forma como $\mathcal{L}_t$ y la $\int$ es respecto de t_0

$$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty \theta(t-t_0)\, f(t_0)\, dt_0\right] = \int_0^\infty \mathcal{L}_t[\theta(t-t_0)]\, f(t_0)\, dt_0 =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-st_0}}{s} f(t_0)\, dt_0 = \frac{F(s)}{s}$$

2 (b) mitjançant la transformada de Laplace:

$$y' - 4y = \int_0^{\infty} u(t-t_0)\, e^{-4t_0}\, dt_0 \quad , \text{ amb } \; y(0)=0$$

$$\mathcal{L}\{y'\} - 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\left\{ \int_0^{\infty} u(t-t_0)\, e^{-4t_0}\, dt_0 \right\}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^{\infty} u(t-t_0)\, e^{-4t_0}\, dt_0 \right\} =$$

$u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$
(aquí t_0 fixe!)

$$\int_0^{\infty} u(t-t_0)\, e^{-4t_0}\, dt_0 = \int_0^t e^{-4t_0}\, dt_0 = \left[\frac{e^{-4t_0}}{-4}\right]_0^t = -\frac{1}{4}\left[e^{-4t} - 1\right]$$

$$\mathcal{L}\left[-\frac{1}{4}\left[e^{-4t} - 1\right]\right] = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(s+4)} - \frac{1}{s}\right] = -\frac{1}{4}\left[\frac{\cancel{s} - \cancel{s} - 4}{s(s+4)}\right] = \frac{1}{s(s+4)} \; !!$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt \int_0^{\infty} u(t-t_0)\, e^{-4t_0}\, dt_0 =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-4t_0}\, dt_0 \int_0^{\infty} e^{-st}\, u(t-t_0)\, dt =$$

$$\int_0^{\infty} e^{-4t_0}\, dt_0 \int_{-t_0}^{\infty} e^{-s(t_0+t')}\, u(t')\, dt' =$$

$$\int_0^{\infty} e^{-4t_0}\, dt_0 \int_0^{\infty} e^{-s(t_0+t')}\, dt' = \int_0^{\infty} dt_0\, \frac{e^{-(4+s)t_0}}{s} = \frac{1}{(4+s)s}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh \alpha t\} = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2} \qquad s > |\alpha|$$

Per tant

$$s\hat{y} - y(0) - 4\hat{y} = \frac{1}{s(4+s)}$$

$$\hat{y}(s-4) = \frac{1}{s(4+s)}$$

$$\hat{y} = \frac{1}{s(s^2 - 4^2)} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} u(t-t_0) \sinh 4t_0\, dt_0$$

$\hat{y} = \dfrac{1}{s(s^2-4^2)}$; $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2-4^2)}\right] = \int_0^t \frac{1}{4}\,\text{senh}\, 4\tau\, d\tau$

$\mathcal{L}[\text{senh}\,\alpha t] = \dfrac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$ $\quad s > |\alpha|$ $\quad = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\cosh 4\tau}{4}\right)_0^t =$

$= \dfrac{1}{4^2}(\cosh 4t - 1)$

---

otra opción usar el teorema de convolución !!

$$y(t) = \int_0^t F(u)\, g(t-u)\, du = \int_0^t g(u)\, f(t-u)\, du = \int_0^t \frac{1}{4}\,\text{senh}\, 4u \cdot 1\, du$$

igual que arriba !!

$F(s) = \dfrac{1}{s} \longrightarrow f(t) = 1$

$G(s) = \dfrac{1}{s^2-4^2} \longrightarrow g(t) = \dfrac{\text{senh}\, 4t}{4}$

mejor hacer al revés

Verificación :

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{4^2}(\cosh 4t - 1)\right] = \frac{1}{4^2}\left[\frac{s}{s^2-4^2} - \frac{1}{s}\right] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{4^2}}\left[\frac{\cancel{s^2} - \cancel{s^2} + \cancel{4^2}}{s(s^2-4^2)}\right] = \frac{1}{s(s^2-4^2)} \quad \text{cqd !!}$$

3 A. 100 llançaments

$p_i = 1/4$ hipòtesi 'a priori' independent de les dades

$np_i = 25$ freqüències esperades

$$\chi^2(3 \text{ graus de llibertat}) = \sum_{i=1}^{4} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{4}{100}(5^2+1+1+5^2) = \frac{208}{100} = 2.08$$

Superior a la mitjana de la variable, $\chi^2_{0.50} = 2.37 > 2.08$

Si rebutgéssim l'hipòtesi actuaríem a un nivell de significació superior al 50 % i estaríem rebutjant més del 50 % dels daus perfectament construïts.

No cal ni mirar les taules. S'hagués produït una desviació estadísticament significativa si $\chi^2 > \chi^2_{0.95} = 7.81$ (nivell de significació del 5 %)

La hipòtesi passa el test i la discrepància no és estadísticament significativa.

1000 llançaments. Intuïtivament "molta casualitat que es mantinguin les freqüències: ~ 10 cops seguits obtenint si fa no fa els mateixos resultats" o bé "quan augmentem el nombre de proves les freqüències observades tendeixen s'apropen a les probabilitats estadística $\xrightarrow[n \to \infty]{}$ probabilitat. (molts graus)

Conclusió: hi ha base per a la "sospita"; s'ha de repetir el càlcul de la discrepància

$$\chi^2(3 \text{ graus llibertat}) = \frac{4}{1000}(2500+100+100+2500) = \frac{20.800}{1000} = 20.8$$

El valor és tan elevat per a 3 graus de llibertat que tampoc cal mirar les taules per a rebutjar la hipòtesi i considerar la discrepància com a estadísticament (molt) significativa. No tan sols $20.8 > 7.81 = \chi^2_{0.95}$

sinó $20.8 > 13.3 = \chi^2_{0.99}$ n.s. 1%

3.B. $Z = X + Y$ $\quad$ X normal $m_1 = m = k_1 \quad \sigma^2 = m = k_2 \quad \sigma = \sqrt{m} \quad k_r = 0 \quad r > 2$

Y Poisson $m_1 = m = k_1 \quad \sigma^2 = m = k_2 \quad k_3 = \dots = k_r = m \quad \forall r$

$k_1(Z) = k_1(X) + k_1(Y) = 2m$

$k_2(Z) = k_2(X) + k_2(Y) = 2m \qquad \sigma(Z) = \sqrt{2m}$ $\quad$ desviació típica

$k_3(Z) = k_3(X) + k_3(Y) = m \qquad \gamma_a = \dfrac{k_3}{\sigma^3} = \dfrac{m}{(\sqrt{2m})^3} = \dfrac{1}{2\sqrt{2m}}$ $\quad$ asimetria

$k_4(Z) = k_4(X) + k_4(Y) = m$

no és per tant ni normal ni Poisson $\qquad \gamma_c = \dfrac{k_4}{\sigma^4} = \dfrac{m}{4m^2} = \dfrac{1}{4m}$ $\quad$ curtosi

La seva funció cumulant, que la caracteritza plenament, més enllà dels quatre descriptors ja calculats, és:

$$\psi_Z(t) = \sum_{r=1}^{\infty} k_r \frac{(it)^r}{r!} = 2m\, it + 2m \frac{(it)^2}{2!} + \sum_{r=3}^{\infty} m \frac{(it)^r}{r!}$$

$$= m \exp(it) + m\, it - m t^2 = \psi_Y(t) + \psi_X(t)$$

Per a la variable $V = \sum_{k=1}^{n} Z_k$ $\quad$ Z_k independents i equidistribuïdes amb la Z anterior

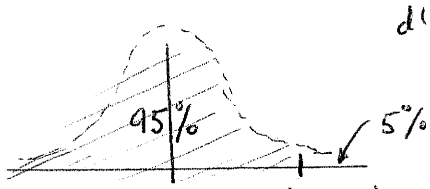
$k_r(V) = n\, k_r(Z)$

$$\gamma_a(V) = \frac{nm}{(\sqrt{2nm})^3} = \frac{1}{2\sqrt{2nm}} < 0.01 \rightarrow \frac{1}{8nm} < 10^{-4}$$

$$\rightarrow n > \frac{10^4}{8m}$$

Per aquest valor $\gamma_c(V) = \dfrac{nm}{(2nm)^2} = \dfrac{1}{4nm} < 2 \cdot 10^{-4}$ $\quad$ Molt bona aproximació a la normal, com era d'esperar

Si $m = 1 \qquad n \geq \dfrac{10^4}{8} = 1250$



valor màxim amb un 95% de seguretat (en 5% dels casos serà superior)

Schaum

$\text{fer}(1.64) = 0.9495$

$\text{fer}(1.65) = 0.9505 \qquad \Rightarrow \text{fer}(1.645) = 0.95$

$k_1(V) = 2nm = 2 \cdot 1250 \cdot 1 = 2500$

$k_2(V) = 2nm = 2500 \qquad \sigma(V) = 50$

Destipificant 1.645 obtenim $\quad V_{\text{màx } 95\%} = 2500 + 1.645 \cdot 50 =$

$= 2500 + 82.25 = \underline{\underline{2582.25}}$

No s'ha d'arrodonir a un nombre sencer ja que les normals poden (però de fet donen amb probabilitat unitat) valors no enters.

4 a. $(a\times b)\cdot(b\times c)\times(c\times a) = (\epsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k)^2 = (a,b,c)^2$

Podem procedir directament

$$\epsilon_{ijk}\, a_j b_k \;\; \epsilon_{ilm} \;\; \epsilon_{lnr}\, b_n c_r \;\; \epsilon_{mst}\, c_s a_t =$$

ϵ presenten diverses opcions equivalents de contracció

explicació $\left\{ \begin{array}{l} (a\times b)_i \quad \overset{\shortparallel}{\epsilon_{lmi}} \quad \underbrace{(b\times c)_l \qquad (c\times a)_m}_{((b\times c)\times(c\times a))_i} \end{array}\right.$

"Escollim" els dos ϵ del mig: $\epsilon_{ilm} = \epsilon_{lmi}$

és important no repetir indegudament els índexs muts de sumació.
Un criteri és anar utilitzant lletres successives de l'alfabet

$$= \epsilon_{ijk}\, a_j b_k\, (\delta_{mn}\delta_{ir} - \delta_{mr}\delta_{in})\, b_n c_r\, \epsilon_{mst}\, c_s a_t$$

$$= \epsilon_{ijk}\, a_j b_k b_m c_i\, \epsilon_{mst}\, c_s a_t - \cancel{\epsilon_{ijk}\, a_j b_k b_i \underbrace{c_m\, \epsilon_{mst}\, c_s}_{\text{suma que dóna zero}} a_t}$$

ϵ_{mst} canvia de signe $m \leftrightarrow s$ i $c_m c_s$ el manté

$$= (\epsilon_{ijk}\, a_j b_k c_i)\cdot(\epsilon_{mst}\, b_m c_s a_t)$$

$$= (\epsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k)^2$$ (es veu directament: $\epsilon_{mst}\, b_m c_s a_t = \epsilon_{tms}\, a_t b_m c_s = \epsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k$)

= volum al quadrat del <u>paral·lelepíped d'arestes a, b, c</u>

Alternativament es pot procedir "per parts":

L'estructura a calcular és $(a\times b)\cdot(C\times D) =$ on C i D seran alhora productes vectorials

$$= \epsilon_{ijk}\, a_j b_k\, \epsilon_{imn}\, C_m D_n = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\, a_j b_k\, C_m D_n =$$

$$= a_j b_k C_j D_k - a_j b_k C_k D_j = (a\cdot C)\cdot(b\cdot D) - (a\cdot D)(b\cdot C)$$

"prod. escalar homòlegs − prod. escalar creuats"

Substituint ara $C = b\times c$ $\quad D = c\times a$

$$(a\times b)\cdot(b\times c)\times(c\times a) = (a\cdot(b\times c))\cdot(b\cdot(c\times a)) - (a\cdot(c\times a))\cdot(b\cdot(b\times c)) =$$

prod. escalar — producte numèric d'escalars (es pot suprimir el $\cdot$)

$$= (a,b,c)\cdot(b,c,a) =$$

$$= (a,b,c)^2$$

$a\cdot(b\times c) = a_i\,\epsilon_{ijk}\, b_j c_k = \epsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k \equiv (a,b,c)$ = volum paral·lelepíped d'arestes (a,b,c)

$a\cdot(c\times a) = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{perquè } c\times a \text{ és perpendicular a } a \text{ (càlcul vectorial tridim)} \\ \text{perquè no determinen cap volum (els 3 vectors estan en un pla)} \\ a_i\,\epsilon_{ijk}\, c_j a_k = \underset{\text{antisim}}{\underline{\underline{\epsilon_{jki}}}}\, c_j\, \underset{\text{simètric}}{\underline{\underline{a_k a_i}}} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} c_3\,\epsilon_{312}\, a_1 a_2 + \\ c_3\,\epsilon_{321}\, a_2 a_1 = 0 \end{array} \right) \end{array}\right.$

explicacions generalitzables a quatre o més dimensions

4 b. $z = a\cos\theta$ $\quad \{\theta,\varphi\} \longrightarrow \{z,\varphi\}$

$\varphi = \varphi$ canvi de coordenades (transf. invertible)

mètrica 2-covariant $\quad g = a^2\, d\theta\otimes d\theta + a^2 \sin^2\theta\, d\varphi\otimes d\varphi \qquad g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$

$dz = -a\sin\theta\, d\theta \;\rightarrow\; d\theta = -\dfrac{dz}{a\sin\theta} \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; g = \frac{dz\otimes dz}{\sin^2\theta} + a^2\sin^2\theta\, d\varphi\otimes d\varphi \qquad g_{i'j'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2\theta} & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

No queda 'elegant' utilitzar la coordenada θ en les funcions components quan fem servir les bases associades a les coordenades (z,φ) $\quad \cos\theta = \dfrac{z}{a} \quad \sin^2\theta = 1 - \dfrac{z^2}{a^2} = \dfrac{a^2-z^2}{a^2}$

$$g = \frac{a^2}{a^2-z^2}\, dz\otimes dz + (a^2-z^2)\, d\varphi\otimes d\varphi \qquad g_{i'j'} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2-z^2} & 0 \\ 0 & a^2-z^2 \end{pmatrix}$$

La mètrica 2-contravariant $\; g^{ij}\, \partial_{x_i}\otimes\partial_{x_j}$ té per matriu la inversa de la mètrica 2-covariant. Com és diagonal (s. coord. ortogonals) la inversió és immediata

$$g_{2\text{-contrav}} = \underline{\frac{a^2-z^2}{a^2}\, \partial_z\otimes\partial_z + \frac{1}{a^2-z^2}\, \partial_\varphi\otimes\partial_\varphi} \qquad g^{i'j'} = \begin{pmatrix} \frac{a^2-z^2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2-z^2} \end{pmatrix}$$

$|\partial_z| = h_z = \sqrt{g_{zz}} = \dfrac{1}{\sin\theta}$ $\qquad$ Sobre l'equador $\theta = 90^\circ$ $\;\sin\theta = 1$

$|\partial_\varphi| = h_\varphi = \sqrt{g_{\varphi\varphi}} = a\sin\theta$ $\qquad$ $|\partial_z| = 1 \quad |\partial_\varphi| = a$ que corresponen a les longituds recorregudes per unitat de coordenada

(1 m. cap al pol nord ens fa recórrer un metre de meridià)

1 radià cap a l'Est ens fa recórrer a unitats de longitud

Sobre el pol (a prop del pol) $\;\sin\theta \to 0 \qquad |\partial_z| \to \infty$

(un petit increment de la coordenada z ens fa recórrer un bon tros de meridià)

$|\partial_\varphi| \to 0$ $\qquad$ En moure'ns sobre el paral·lel un radià de paral·lel ens fa recórrer una longitud cada cop més petita quan ens apropem al pol

$|dz| = \dfrac{1}{h_z} = \sqrt{g^{zz}} = \sin\theta$ $\qquad$ $|dz| = 1$ sobre l'equador. La coordenada z s'incrementa una unitat per cada unitat que pugem pel meridià (paral·lel a l'eix z sobre l'equador)

$|dz| \to 0$ prop del pol. $\;z$ pràcticament no creix quan avancem una unitat de longitud pel meridià (que és quasi $\perp$ a l'eix z)

$|d\varphi| = \dfrac{1}{a\sin\theta}$ $\qquad$ $|d\varphi| = \dfrac{1}{a}$ sobre l'equador: per cada metre cap a l'Est avancem $\dfrac{1}{a}$ radians.

$|d\varphi| \to \infty$ prop del pol. Per cada unitat de longitud que avancem sobre el paral·lel l'increment de la coordenada angular φ es fa més i més gran en apropar-nos al pol.

c) La base física d'un sistema de coordenades ortogonals és ortonormal
e_z és el vector unitari adreçat cap al Pol Nord seguint el meridià (línia en que creix z mantenint-se la φ constant) Per tant $e_z = -e_\theta$ ja que la coordenada esfèrica θ creix seguint el meridià cap al Sud.

Per tant, tenint present que $\cos\theta = \dfrac{z}{a}$

$$T = -\frac{z}{a}\left(e_z \otimes e_\varphi - e_\varphi \otimes e_z\right) \qquad \left(\hat{t}^{i'j'}\right) = \left(t^{i''j''}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -z/a \\ z/a & 0 \end{pmatrix}$$

(matriu de components físiques)

En la base esfèrica

$$T = \cos\theta\left(e_\theta \otimes e_\varphi - e_\varphi \otimes e_\theta\right) \longrightarrow \hat{t}^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta \\ -\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

el procediment habitual de canvi de components mitjançant càlcul matricial no és necessari ja que només hem canviat el sentit d'un vector de la base (reflexió, no rotació)

Procediments alternatius (matricials) d'obtenir els resultats anteriors:

$$g_{i'j'}(y) = \frac{\partial x^i}{\partial y^{i'}}\, g_{ij}(x)\, \frac{\partial x^j}{\partial y^{j'}}$$

Jacobiana transposada (no canvia perquè és diagonal)

la Jacobiana $\dfrac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(z,\varphi)} = \left(\dfrac{\partial(z,\varphi)}{\partial(\theta,\varphi)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -a\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{a\sin\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(g_{i'j'}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a\sin\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & \\ & a^2\sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{a\sin\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2\theta} & \\ & a^2\sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2-z^2} & 0 \\ 0 & a^2-z^2 \end{pmatrix}$$

i es continua com abans.

Pel que fa a l'apartat c) transformació de les components en canviar de base cal tenir present que les components físiques no canvien amb les jacobianes, sinó amb matrius de rotació (que s'obtenen per normalització de les columnes de les jacobianes!)

Com e_φ és el mateix hem d'expressar e_θ en funció d'e_z

$$e_\theta = \frac{\partial_\theta}{h_\theta} = \frac{\partial_\theta}{a} = \frac{1}{a}\frac{\partial z}{\partial\theta}\,\partial_z = -\sin\theta\,\partial_z = -\sin\theta\, h_z\, e_z = -\sin\theta\,\frac{1}{\sin\theta}\,e_z = -e_z$$

relació que havíem obtingut directament per raonament geomètric.

$$\hat{t}^{i'j'} = a^{i'}{}_i\, \hat{t}^{ij}\, a_j{}^{j'} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & z/a \\ -z/a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -z/a \\ z/a & 0 \end{pmatrix}$$

multiplica la 1ª fila per -1 — $\cos\theta = z/a$ — canvia el signe a la 1ª columna — coincident amb el resultat anteriorment obtingut

ASSIGNATURA: Mètodes Matemàtics de la Física II
DEPARTAMENT: Física Fonamental
DATA 26 – juny – 2007

1. *(3 punts.)* Tots els punts d'una corda uniforme estan sotmesos a una força de fregament proporcional a la velocitat. L'equació d'ones és:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t}$$

on v és una constant amb dimensions de velocitat, γ és una constant que mesura el fregament i $u(x,t)$ és el desplaçament de cada punt x de la corda respecte de l'horitzontal a l'instant t.

Resoleu aquesta equació per a una corda de longitud l amb les condicions de contorn i inicials següents:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0 \sin(\frac{\pi x}{l}), \quad u_t(x,0) = 0.$$

Particularitzeu la solució al cas $\gamma < \frac{1}{lv}$.

2. (a) *(1 punt.)* Calculeu la transformada de Laplace de $J_0(x)$ fent-ne ús de la seva representació integral:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)d\theta$$

.

(b) *(2 punts.)* En una barra finita aïllada no homogènia la conductivitat tèrmica λ varia com $\lambda_0(1-x^2)$ per a tot $-1 \leq x \leq 1$, amb λ_0 constant. L'equació diferencial que satisfà la temperatura $T(x,t)$ és:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial T}{\partial x}\right).$$

Determineu com varia la distribució de temperatura de la barra si inicialment la temperatura és $T(x,0) = x^2(1-x^2)$. Raoneu, fent servir criteris físics, els possibles valors de la constant de separació.

3. (a) *(0.5 punts.)* Es distribueixen 24 partícules de Bose-Einstein en 10 cel·les. Quina és la probabilitat que cap cel·la quedi amb menys de dues partícules?

(b) *(0.5 punts.)* En aplicar el test χ^2 a una distribució de probabilitat hem estimat 2 paràmetres a partir de la mostra i hem distribuït les dades en 12 regions. La discrepància observada és χ^2(mostra)$= 19.9$. Què en pots concloure?

(c) En un programa assistencial s'efectuen tres controls de tipus A, 6 controls de tipus B i 9 controls de tipus C. Els valors obtinguts en cadascun dels controls segueixen distribucions gaussianes de mitjana i variança conegudes: A=(7.2,4.1), B=(6.5,3.9), C=(4.9, 4.0).

i. *(0.5 punts.)* Quina és la llei de distribució de la puntuació total obtinguda a partir de les 18 proves?

ii. *(0.5 punts.)* Arrodonint a la dècima, quina és la puntuació global màxima que dóna dret a la prestació social si s'estableix: a) que cal estar més de dues desviacions típiques per sota de la mitjana, b) que rebran la prestació el 10% amb inferior puntuació.

4. (a) *(0.4 punts.)* Deduïu l'expressió habitual per a $\nabla \times (a \times b)$ mitjançant l'ús del tensor totalment antisimètric de Levi-Civita.

   (b) (OPCIÓ 1) *(0.4 punts.)* Definiu els tensors de tipus 2-covariant 1-contravariant sobre un espai vectorial E, primer com a aplicacions multilineals i després com a aplicacions lineals. Què hi guanyem amb aquesta segona definició? Doneu un exemple concret d'aquest tipus de tensor amb tres components no nul·les en les bases escollides $\{e_i, e^i\}$ per a E i E^*.

   (OPCIÓ 2) *(0.4 punts.)* Per a un espaitemps de dues dimensions (t, x) escriviu la transformació de coordenades associada a un canvi de sistema de referència inercial amb (t', x') les noves coordenades. Demostreu la invariància de la mètrica de Minkowski i expliqueu en què consisteix l'anomenada *dilatació del temps*.

   (c) Les components físiques en coordenades polars d'un camp vectorial contravariant A i un camp tensorial 2-contravariant T definits sobre el plà euclidià són:

$$\hat{A}^r = \hat{A}^\theta = 1 \qquad \hat{T}^{rr} = \hat{T}^{r\theta} = \hat{T}^{\theta r} = \hat{T}^{\theta\theta} = 1$$

      i. *(0.4 punts.)* Expresseu aquests camps en les corresponents bases naturals (holònomes): $T = T^{rr}\partial_r \otimes \partial_r + \ldots$

      ii. *(0.4 punts.)* Expresseu el camp vectorial covariant i el camp tensorial 2-covariant mètricament associats als anteriors en la base polar natural: $T = T_{rr} dr \otimes dr + \ldots$

      iii. *(0.4 punts.)* Determineu les components cartesianes dels camps A i T.

(P1)-1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$T(t)\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{v^2}X(x)\frac{d^2T}{dt^2} + \gamma X(x)\frac{dT}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{1}{v^2T(t)}\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{\gamma}{T(t)}\frac{dT}{dt}}_{\varphi(t)} = \text{cte}!! = \lambda$$

$=$

$\forall x \in [0,l]$

$\forall t \in [0,+\infty)$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \lambda X(x) \rightarrow \text{Ec. SL} + \text{cond. contorno homogéneas}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \gamma v^2\frac{dT}{dt} = \lambda v^2 T(t)$$

$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \ \forall t$

$u(l,t) = X(l)T(t) = 0 \ \forall t$

$\Rightarrow X(0) = 0$

$X(l) = 0$

$\lambda \in \mathbb{R}$!!!

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda X(x) = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} X(x) = e^{px} \\ X''(x) = p^2e^{px}\end{array}\right\}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \gamma v^2\frac{dT}{dt} - \lambda v^2 T(t) = 0$$

$\Rightarrow p^2 - \lambda = 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{\lambda}$

si $\lambda = 0$ $p = 0$ solo una sol. la 2ª es $xe^{px} = x$;

$\lambda \neq 0$ $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$\lambda = 0$ $X(x) = C + Dx$ + cond. contorno $\Rightarrow$

$\Rightarrow C = D = 0$

$\lambda \neq 0$ no es valor propio

$X(0) = A + B = 0 = \boxed{A = -B}$

$X(l) = Ae^{\sqrt{\lambda}l} + Be^{-\sqrt{\lambda}l} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}l} & e^{-\sqrt{\lambda}l}\end{vmatrix} = 0$$

!!

$e^{-\sqrt{\lambda}l} - e^{+\sqrt{\lambda}l} = 0 \Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda}l} = 1$

$a + bi = 2\sqrt{\lambda}l$; $e^a[\cos b + i\,\mathrm{sen}\, b] = 0 <$ $a = 0$, $b = 2\pi n$

$n = 1,2,3\ldots$ ($n=0$ nulo)

Luego $\cancel{2}\sqrt{\lambda}\, l = \cancel{2}\pi n i$; $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} i$; $n=1,2,3,\dots$

(P1) 2

$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ valores propios

$$X_n(x) = A e^{\frac{in\pi x}{l}} - A e^{-i\frac{n\pi x}{l}} = \underbrace{A}_{\tilde{A}} \underbrace{\left(e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}}\right)}_{2i \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}} =$$

$$= \underbrace{\tilde{A} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}}_{\text{func. propias}} ; \quad n=1,2,3\dots$$

$T(t) = e^{\alpha t}$;
$T'(t) = \alpha e^{\alpha t}$
$T''(t) = \alpha^2 e^{\alpha t}$

$$\alpha^2 + \gamma v^2 \alpha - \lambda v^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{-\gamma v^2 \pm \sqrt{(\gamma v^2)^2 + 4\cdot\lambda v^2}}{2} =$$

$$= -\frac{\gamma v^2}{2} \pm \frac{1}{2}(\gamma v^2)\left(1 + \underbrace{\frac{4\lambda \cancel{v^2}}{\gamma^2 (v^2)^{\cancel{2}}}}\right) =$$

$$= -\frac{\gamma v^2}{2}\left[1 \pm \left(1 + \frac{4\lambda}{\gamma^2 v^2}\right)^{1/2}\right] = -\frac{\gamma v^2}{2} \pm \frac{\gamma v^2}{2} i \overbrace{\sqrt{\dots}}^{i\delta_n}$$

$$\delta_n = \frac{\gamma v^2}{2} \cdot \left(\frac{4n^2\pi^2}{\gamma^2 v^2 l^2} - 1\right)^{1/2}$$

$$\left(1 + \frac{4\lambda}{\gamma^2 v^2}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{4n^2\pi^2}{\gamma^2 v^2 l^2}\right)^{1/2} = i\sqrt{\frac{4n^2\pi^2}{\gamma^2 v^2 l^2} - 1}$$

si $\gamma < \frac{1}{lv}$; $\quad 1 < \frac{1}{\gamma l v}$; $\quad \gamma l v < 1$; $(\gamma l v)^2 << 1$

$$1 - \frac{4n^2\pi^2}{\gamma^2 v^2 l^2} < 0 \quad \forall n = 1,2,3\dots$$

$$T(t) = e^{-\frac{\gamma v^2}{2}t}\left[C e^{i\delta_n t} + D e^{-i\delta_n t}\right]$$

$$(C \operatorname{sen} \delta_n t + D \cos \delta_n t)$$

(P1)-3

$$u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) =$$

$$= \tilde{A}_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}\cdot e^{-\frac{\gamma v^2}{2}t}\left[C_n \operatorname{sen}\delta_n t + D_n\cos\delta_n t\right]$$

$$= A_n e^{-\frac{\gamma v^2}{2}t}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}\cdot\operatorname{sen}\delta_n t +$$

$$+ B_n e^{-\frac{\gamma v^2}{2}t}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}\cos\delta_n t$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = e^{-\frac{\gamma v^2}{2}t}\varphi_n(x,t)$$

Cond. iniciales: $u(x,0) = u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_1 = u_0\ ;\quad \underset{n>1}{B_n} = 0$$

$$v(x,t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\gamma v^2}{2}\right)e^{-\frac{\gamma v^2}{2}t}\varphi_n(x,t)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\gamma v^2}{2}t}\underbrace{\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}\right)_x}_{A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}\cdot\delta_n\cos\delta_n t + B_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}(-\delta_n)\operatorname{sen}\delta_n t}$$

$$v(x,0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_x\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(-\frac{\gamma v^2}{2}\right)\varphi_n(x,0) + e^{-\frac{\gamma v^2}{2}t}A_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}\cdot\delta_n\right]$$

$$= \left[\left(-\frac{\gamma v^2}{2}\right)u_0\operatorname{sen}\frac{\pi x}{\ell} + \sum_{n=1}^{\infty}A_n\delta_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{n>1}{A_n} = 0$$

y $A_1 \neq 0$ $\quad\left(-\frac{\gamma v^2}{2}\right)u_0 + A_1\delta_1 = 0$ ||

$$A_1 = \frac{\gamma v^2}{2}\frac{u_0}{\delta_1}$$

Versió "alternativa) (P1)-a

$\rightarrow \quad \frac{d^2X}{dx^2} - \lambda X(x) = 0;$ $\quad \lambda > 0;$ sea $\omega > 0$ $\quad \lambda = +\omega^2 \quad (1)$

$\lambda < 0$ sea $\omega > 0$ $\quad \lambda = -\omega^2 \quad (2)$

$\lambda = 0 \quad (3)$

(1) Sol. $\quad \frac{d^2X}{dx^2} - \omega^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A\,\mathrm{senh}\,\omega x + B\cosh \omega x$

(2) Sol. $\quad \frac{d^2X}{dx^2} + \omega^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A\,\mathrm{sen}\,\omega x + B\cos\omega x$

(3) Sol. $\quad \frac{d^2X}{dx^2} = 0 \Rightarrow X(x) = C + Dx$

+ Cond. contorno $\left.\begin{array}{l} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{array}\right\}$ (1) y (3) sol. trivial

(2) $A\,\mathrm{sen}\,\omega.0 + B\cos\omega.0 = 0$

$A\,\mathrm{sen}\,\omega l + B\cos\omega l = 0$

$\Rightarrow \begin{array}{l} B = 0 \\ \mathrm{sen}\,\omega l = 0 \Rightarrow \omega l = n\pi; \; n = 1, 2, 3 \dots \end{array}$

$\omega_n = \frac{n\pi}{l}$

Func. propias $\quad X_n(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l} \Big|_{n = 1, 2, 3 \dots}$

$\rightarrow \quad \frac{d^2T}{dt^2} + \gamma v^2 \frac{dT}{dt} + \omega^2 v^2 T(t) = 0$

$T(t) \sim e^{\alpha t} \Rightarrow \alpha^2 + \gamma v^2 \alpha + \omega^2 v^2 = 0$

$$\alpha = \frac{-\gamma v^2 \pm \sqrt{(\gamma v^2)^2 - 4\omega^2 v^2}}{2} =$$

$$= -\frac{\gamma v^2}{2} \pm \frac{\gamma v^2}{2}\sqrt{1 - \frac{4\omega^2 v^2}{(\gamma v^2)^2}}$$

$$= -\frac{\gamma v^2}{2} \pm P$$

$\omega = \omega_n = \frac{n\pi}{l}$

$$\alpha_n = -\frac{\gamma v^2}{2} \pm P_n = -\frac{\gamma v^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma v^2)^2 - \frac{4n^2\pi^2 v^2}{l^2}}$$

o bien

(PL)-b

$$\alpha_n = -\frac{\gamma v^2}{2} \pm \left(\left(\frac{\gamma v^2}{2}\right)^2 - \frac{n^2\pi^2 v^2}{l^2}\right)^{1/2} =$$

$$= -\frac{\gamma v^2}{2} \pm \underbrace{\left[\frac{\gamma^2 v^2}{4} - \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right]^{1/2} v}_{P_n} = -\frac{\gamma v^2}{2} \pm P_n$$

$$T_n(t) = e^{-\frac{\gamma v^2}{2}}\left[C_n e^{P_n t} + D_n e^{-P_n t}\right]$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\frac{\gamma v^2}{2}}\left[C_n e^{P_n t} + D_n e^{-P_n t}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\frac{\gamma v^2}{2}t} e^{P_n t} + B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \cdot e^{-\frac{\gamma v^2}{2}t} e^{-P_n t}\right]$$

(Si $p=0 \Rightarrow \exists$ una soluc. del tipo $t e^{pt}$!)

Cond. iniciales.

$$u(x,0)=0 = u_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} + B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_x\Big|_{t=0} = 0 \quad \ldots.$$

P 2

a) $J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t \sin\theta)\, d\theta$

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta)\, d\theta\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} \cos(t\sin\theta)\, dt}_{\frac{s}{s^2+\sin^2\theta}} =$$

$$= \frac{s}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \frac{1}{s^2+\sin^2\theta} = \frac{2s}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{s^2+\sin^2\theta} \Rightarrow$$

$$x = \operatorname{tg}\theta \qquad dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \qquad d\theta = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2s}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{s^2+\frac{x^2}{1+x^2}}\, dx = \frac{2s}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^2(1+s^2)+s^2}$$

$$= \frac{2s}{\pi(1+s^2)} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^2+\frac{s^2}{1+s^2}} = \frac{2s}{\pi(1+s^2)} \frac{1}{\left(\frac{s^2}{1+s^2}\right)^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\left(s^2/1+s^2\right)^2} \Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)^{1/2}}$$

(P2) → (b)

$-1 \le x \le 1$; conductividad $\propto$ a $1-x^2$ la Temperatura $u(x,t)$ obedece la ec.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

Como la conduct en ext es <u>nula</u>, los extremos están aislados!!

Cond. inicial $u(x,0) = f(x)$

$u = T(t)\,X(x)$

$$X\frac{dT}{dt} = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)T(t)\frac{dX}{dx}\right] =$$

$$= \lambda_0 T(t)\left[-2x\frac{dX}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2X}{dx^2}\right]$$

$$\underbrace{\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}}_{\alpha} = \underbrace{\frac{\lambda_0}{X}\left[-2x\frac{dX}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2X}{dx^2}\right]}_{\alpha}$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \cdot T \longrightarrow \quad \frac{dT}{dt} = -n(n+1)\lambda_0 dt \,; \boxed{T(t) = C e^{-n(n+1)\lambda_0 t}}$$

$$-2x\frac{dX}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{\alpha}{\lambda_0}\cdot X \Rightarrow \boxed{(1-x^2)X'' - 2xX' - \frac{\alpha}{\lambda_0}X = 0}$$

Para que $X(x)$ finita en $x = 1$, $x = 1$

$(\lambda(x=\pm 1) = 0)$! aislado!!

$$-\frac{\alpha}{\lambda_0} = n(n+1) \quad \text{sol } \underline{\underline{P_n(x)}}$$

$n = 0, 1, 2, 3\ldots$

$$\alpha = -n(n+1)\lambda_0$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n(n+1)\lambda_0 t} P_n(x)$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) \,;$$

$$\langle P_n(x) | f(x)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n'} \overbrace{\langle P_n(x) | P_{n'}(x)\rangle}^{\frac{2}{2n+1}\delta_{nn'}} =$$

$$= A_n \frac{2}{2n+1}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2}\right) e^{-n(n+1)\lambda_0 t} P_n(x)\left[\int_{-1}^{+1} f(z) P_n(z)\,dz\right]$$

Caso especial $f(x) = x^2(1-x^2)$

Nomes contribueix $n=0, n=2, n=4$

$$\int_{-1}^{+1} f(z) P_n(z)\,dz = \ldots\ldots \Rightarrow$$

$$x^2(1-x^2) = \frac{2}{15}P_0(x) + \frac{2}{21}P_2(x) - \frac{8}{35}P_4(x)$$

3 a) La condició implica que una "còpia" de dues partícules ocupe totes les cel·les. Les diferents distribucions corresponen a com es distribueixen les 4 partícules sobreres en 10 cel·les

$$p = \frac{\binom{13}{4} \leftarrow \text{triem les partícules}}{\binom{33}{9} \leftarrow \text{triem les barres de cel·la}} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2}\ \frac{9!}{33\cdot 32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25} =$$

(per canonicitat)

$$= \frac{13!}{24\cdot(33\cdots 25)} = 1.854\ 10^{-5} = \frac{13!\ 23!}{33!}$$

3b) 12 regions amb 2 paràmetres estimats $\Rightarrow$ 9 graus de llibertat

$$\chi^2_{0.95}(9) = 16.9 < \chi^2_{0.975} = 19 < \chi^2(\text{mostra}) = 19.9 < \chi^2_{0.99}(9) = 21.7$$

$\Rightarrow$ Les dades discrepen de la hipòtesi de manera estadísticament significativa
La hipòtesi és refusada a un nivell de significació del 5% i també al n.s. del 2.5%
La hipòtesi s'accepta (no pot refusar-se) a un nivell de significació del 1%

3c) La suma de gaussianes independent és una gaussiana amb $m = \sum m_i$ $\quad \sigma^2 = \sum \sigma_i^2$
(cas particular de $k_r = \sum k_r(i)$ amb $k_r = 0$ $\quad r \geq 3$)

i) La puntuació total de les 18 proves és una gaussiana de (mitjana, variança) = (104.7, 71.7)

mitjana $= m = k_1 = 3\times 7.2 + 6\times 6.5 + 9\times 4.9 = 21.6 + 39 + 44.1 = 104.7$

variança $= \sigma^2 = k_2 = 3\times 4.1 + 6\times 3.9 + 9\times 4 = 12.3 + 23.4 + 36 = 71.7$ $\quad \sigma \simeq 8.467$

ii)a) $m - 2\sigma = 87.76\ldots$ Cal obtenir menys de 87.76 punts per a satisfer la condició
arrodonit a la dècima la puntuació màxima que dóna dret a la prestació és 87.7

b) $pr(1.28) = 0.8997$ $\quad 0.9 = pr\left(1.28 + 0.01\,\frac{3}{18}\right) = pr(1.2817)$
$pr(1.29) = 0.9015$

$m - 1.2817\,\sigma = m - 10.85 = 93.847$

En aquest cas la puntuació màxima adequada és de 93.8 punts

4a) $(\nabla\times(a\times b))_i = \epsilon_{ijk}\,\partial_j\,\epsilon_{kmn}\,a_m b_n = \epsilon_{kij}\,\epsilon_{kmn}\,\partial_j(a_m b_n) =$

$= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\,\partial_j(a_m b_n) = \partial_j(a_i b_j) - \partial_j(a_j b_i) =$

$= (\partial_j b_j)\,a_i + b_j(\partial_j a_i) - (\partial_j a_j)\,b_i - a_j(\partial_j b_i) = \left[(\nabla\cdot b)\,a + (b\cdot\nabla)\,a - (\ \ )\,b - (a\cdot\nabla)\,b\right]_i$

Per tant $\nabla\times(a\times b) = (\nabla\cdot b)\,a - (\nabla\cdot a)\,b + (b\cdot\nabla)\,a - (a\cdot\nabla)\,b$

també $\mathrm{rot}\,(a\times b) = (\mathrm{div}\,b)\,a - (\mathrm{div}\,a)\,b + \nabla_b a - \nabla_a b$

4c) $\boxed{i, ii}$ $A = e_r + e_\theta = \partial_r + \frac{1}{r}\partial_\theta \underset{\text{mètricament associat}}{\approx} dr + r\,d\theta$

$$T = e_r\otimes e_r + e_r\otimes e_\theta + e_\theta\otimes e_r + e_\theta\otimes e_\theta =$$

$$= \partial_r\otimes\partial_r + \frac{1}{r}\partial_r\otimes\partial_\theta + \frac{1}{r}\partial_\theta\otimes\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta\otimes\partial_\theta$$

$$\approx dr\otimes dr + r\,dr\otimes d\theta + r\,d\theta\otimes dr + r^2\,d\theta\otimes d\theta$$

(matricialment - no es demana - tenim: $\hat{A}^i = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $A^i = \begin{pmatrix}1\\1/r\end{pmatrix}$ $A_i = \begin{pmatrix}1\\r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \\ & r^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1/r\end{pmatrix}$

$(\hat{T}^{ij}) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ $(T^{ij}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1/r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1/r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1/r\\1/r & 1/r^2\end{pmatrix}$ $(A_i = g_{ij}A^j)$

$$T_{ij} = g_{im}T^{mn}g_{nj} \rightarrow (T_{ij}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & r^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/r\\1/r & 1/r^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & r^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & r\\r & r^2\end{pmatrix}$$

$\boxed{iii}$ Per a donar l'expressió cartesiana dels camps el més natural i senzill és partir de les seves components físiques, ja que el canvi de base és senzillament una rotació:

$$e_r = \partial_r = \frac{\partial x}{\partial r}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial r}\partial_y = \cos\theta\,\partial_x + \sin\theta\,\partial_y$$

$$e_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta = \frac{\partial x}{\partial\theta}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial\theta}\partial_y = -\sin\theta\,\partial_x + \cos\theta\,\partial_y$$

$$A = e_r + e_\theta = (\cos\theta - \sin\theta)\partial_x + (\cos\theta + \sin\theta)\partial_y = \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_x + \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_y \qquad A_{cart} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}$$

Per al tensor de 2on ordre és millor fer-ho matricialment. cartesianes i esfèriques físiques i

$T^{i'j'} = a^{i'}{}_i T^{ij} a_j{}^{j'}$ Transposada de la matriu 1er factor (també és la seva inversa)

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_\theta & -s_\theta\\ s_\theta & c_\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_\theta & s_\theta\\ -s_\theta & c_\theta\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_\theta & -s_\theta\\ s_\theta & c_\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-s_\theta & c_\theta\\ c_\theta & s_\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 - 2c_\theta s_\theta & c_\theta^2 - s_\theta^2\\ c_\theta^2 - s_\theta^2 & 1 + 2c_\theta s_\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 - \sin 2\theta & \cos 2\theta\\ \cos 2\theta & 1 + \sin 2\theta\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}T^{xx} & T^{xy}\\ T^{yx} & T^{yy}\end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x^2+y^2-2xy & x^2-y^2\\ x^2-y^2 & x^2+y^2+2xy\end{pmatrix}$$

components cartesianes expressades en funció de les coordenades polars del punt

Expressades en cartesianes ↑

$$T^{xx} = \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} \qquad T^{xy} = T^{yx} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad T^{yy} = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$$

- Naturalment també es pot procedir per substitució directa de les bases.
- En cartesianes les components covariants, contravariants i físiques sempre coincideixen (espais euclidians) $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

4b(2): $t' = \operatorname{ch}\xi\, t + \operatorname{sh}\xi\, x$ $\qquad g = dt'\otimes dt' - dx'\otimes dx' =$

$x' = \operatorname{sh}\xi\, t + \operatorname{ch}\xi\, x$

$$= (\operatorname{ch}\xi\, dt + \operatorname{sh}\xi\, dx)\otimes(\operatorname{ch}\xi\, dt + \operatorname{sh}\xi\, dx) - (\operatorname{sh}\xi\, dt + \operatorname{ch}\xi\, dx)\otimes(\operatorname{sh}\xi\, dt + \operatorname{ch}\xi\, dx) =$$

$$= (\operatorname{ch}^2\xi - \operatorname{sh}^2\xi)\,dt\otimes dt - (\operatorname{ch}^2\xi - \operatorname{sh}^2\xi)\,dx\otimes dx + dt\otimes dx\,\cancel{(\operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}\xi - \operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi)} + dx\otimes dt\,\cancel{(\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi - \operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}\xi)} =$$

$= dt\otimes dt - dx\otimes dx$ Queda, doncs, invariant. També es pot fer matricialment.

Dilatació de temps: $\partial_t = \frac{\partial t'}{\partial t}\partial_{t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\partial_{x'} = \underline{\cosh\xi}\,\partial_{t'} + \sinh\xi\,\partial_{x'}$: 1 segon en Σ, $\cosh\xi$ segons en Σ'

ASSIGNATURA: Mètodes Matemàtics de la Física II
DEPARTAMENT: Física Fonamental
DATA EXAMEN: 29 – gener – 2008

1. (*3 punts*) Donat el problema de valors propis

$$y'' - 2y' + \lambda y = 0 \qquad 0 \leq x \leq \pi \qquad (1)$$

amb les condicions de contorn $y(0) = y(\pi) = 0$, es demana:

(a) És un problema de Sturm-Liouville (SL)? Raoneu la resposta.

(b) Si la resposta a la qüestió anterior és negativa, transformeu l'equació diferencial (1) a la forma canònica de SL. Quina és la funció pes?

(c) Trobeu el conjunt de funcions pròpies i valors propis corresponents al problema de SL. Quins dels valors propis són degenerats?

(d) Desenvolupeu la funció

$$f(x) = xe^x \qquad x \in [0, \pi]$$

en termes del conjunt complet de funcions pròpies. Utilitzeu la forma integral de les relacions d'ortogonalitat entre les funcions pròpies.

2.1 (*1.5 punts*) Si definim la transformada de Fourier $\hat{F}(\omega)$ d'una funció $f(t)$ com

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

trobeu $\hat{F}(\omega)$ per a la funció $f(t) = t \exp(-a\,|t|)$, $\quad a > 0$, a partir del resultat

$$\mathcal{L}_a [\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \qquad a > 0$$

No podeu utilitzar el llibre de taules per resoldre aquesta qüestió.

2.2 (*1.5 punts*) Resoleu la següent equació diferencial no homogènia:

$$y'' - 4y' + 4y = g(t) \quad t \in [0, +\infty) \quad \text{amb les C.I.} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

3.1 (*1.5 punts*) Considereu els sistemes de coordenades cilíndriques $\{\rho, \varphi, z\}$ i esfèriques $\{r, \theta, \varphi\}$ associats a un determinat sistema de coordenades cartesianes de $\Re^3$.

(a) Expresseu en base esfèrica natural i en base esfèrica física (ortonormal) el camp vectorial contravariant $v = (1/\rho)\partial_\rho$.

(b) Fent ús de la corresponent expressió matricial per al càlcul del canvi de components, determineu en la base esfèrica natural les components del tensor 2-covariant $T = d\rho \otimes d\rho + d\rho \otimes d\varphi - d\varphi \otimes d\rho + dz \otimes dz$.

(c) Doneu les expressions matricial i completa del tensor T en la base esfèrica física.

3.2 (*0.5 punts*) Deduïu, en funció dels coeficients de Lamé i dels elements de les matrius jacobianes associades a un canvi de sistema de coordenades ortogonal, l'expressió genèrica del canvi de components físiques d'un tensor 2-contravariant:

$$t^{i'j'} = f(t^{ij}, h_i, h_{i'}, \partial x^{i'}/\partial x^i, \partial x^i/\partial x^{i'})$$

4.1 (*0.4 punts*) Partint de l'expressió que dóna p_r, $\quad r = 0, 1, 2 \ldots$, calculeu les principals característiques funcionals (funció característica i funció cumulant) i numèriques (cumulants, moments centrals fins al quart ordre, asimetria i curtosi) de la distribució de Poisson de paràmetre λ.

4.2 (*0.6 punts*) Es distribueixen, d'acord amb l'estadística de Bose-Einstein (partícules indistingibles no sotmeses al principi d'exclusió) 100 partícules en 10 cel·les. Determineu, i expresseu amb quatre xifres significatives: **a)** El nombre total de configuracions possibles.
b) La probabilitat que una cel·la determinada quedi buïda. **c)** La probabilitat que una cel·la determinada contingui exactament 10 partícules.

4.3 (*1 punt*) Sotmetem al test χ^2 la hipòtesi segons la qual 50 dades numèriques han estat obtingudes d'acord amb la llei de probabilitat χ^2 d'un grau de llibertat. La informació que ens ha estat facilitada sobre la mostra consisteix en afirmar que hi ha 10 dades a cadascun dels intervals següents : (0,0.1), (0.1,0.3), (0.3,0.7), (0.7,1.7), (1.7, $+\infty$). Determineu els nivells de significació tabulats per als quals acceptarem o refusarem la hipòtesi. Utilitzeu la taula de la funció de distribució de la normal per a calcular, fent ús de la interpolació lineal, les probabilitats teòriques associades a cadascuna de les regions d'agrupament de les dades.

Problema 1

$$y''(x) - 2y'(x) + \lambda y(x) = 0 \,, \quad 0 \le x \le \pi \qquad (*)$$
$$y(0) = y(\pi) = 0$$

(a) l'equació anterior no té la forma de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}y\right) + \left(q(x) + \lambda w(x)\right)y(x) = 0$$

(b)
$$p(x) = \exp\left(\int_0^x (-2)\,dt\right) = e^{-2x}$$
factor

$$e^{-2x}y'' - 2e^{-2x}y' + \lambda e^{-2x}y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\frac{d}{dx}y\right) + \lambda e^{-2x}y = 0 \qquad \text{Sturm-Liouville}$$

amb $p(x) = e^{-2x}$, $q(x) = 0$, $w(x) = e^{-2x}$
pes

(c) solucionem $(*)$

$$y(x) \sim e^{rx}$$
$$r^2 - 2r + \lambda = 0 \longrightarrow r = 1 \pm \sqrt{1-\lambda}$$
$$y = A\,e^x e^{x\sqrt{1-\lambda}} + B\,e^x e^{-x\sqrt{1-\lambda}}$$

$\lambda = 1$:
arrel doble, $r = 1 \rightarrow y(x) = e^x(Ax + B)$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \Rightarrow B=0 \\ y(\pi)=0 \Rightarrow A=0 \end{array}\right\}$$ per tant $y(x)=0$, $\lambda=1$ no pot ser autovalor

$\lambda<1$:

$$y(x)= e^{x}\left(a \cosh \sqrt{1-\lambda}\, x + b \sinh \sqrt{1-\lambda}\, x\right)$$

on $A=\frac{a+b}{2}$ i $B=\frac{a-b}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \rightarrow a=0 \\ y(\pi)=0 \rightarrow b=0 \end{array}\right\}$$ per tant $y(x)=0$, no existeixen autovalors $\lambda<1$

$\lambda>1$:

$$y(x)= e^{x}\left(a \cos \sqrt{\lambda-1}\, x + b \sin \sqrt{\lambda-1}\, x\right)$$

$$A=\frac{a-bi}{2} \qquad B=\frac{a+bi}{2}$$

les condicions de contorn duen a

$b\neq 0$, $a=0$, $\sqrt{\lambda-1}=n$ amb $n=\pm 1, \pm 2 \dots$

$$\lambda=\lambda_n \equiv 1+n^2$$

$$y_n(x)= e^{x} \sin \sqrt{\lambda_n-1}\, x = e^{x} \sin nx$$

els valors $n=-1,-2,\dots$ no duen ni a autovalors ni a autofuncions diferents

(d)

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m y_m \qquad , \qquad y_m = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{x} \sin(mx)$$

$$c_m = \int_0^{\pi} y_m(x)\, e^{-2x} f(x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} x \sin(mx)\, dx =$$

$$= \sqrt{2\pi}\; \frac{(-1)^{m+1}}{m}$$

per tant

$$x e^{x} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}\, e^{x} \sin(mx)$$

2.1 (d)

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Si $f(t) = t e^{-a|t|}$, $a>0$

$$\mathcal{F}\left[t e^{-a|t|}\right] = \hat{F}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-a|t|} \underbrace{e^{-i\omega t}}_{\cos\omega t - i \operatorname{sen}\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \Bigg[\underbrace{\cancel{\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{t e^{-a|t|}}^{\text{f.par}} \underbrace{\cos\omega t}_{\text{f.par}}\, dt}_{\text{f.impar}}}}_{0} - i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{t e^{-a|t|}}^{\text{f.par}} \underbrace{\operatorname{sen}\omega t}_{\text{funció impar}}\, dt}_{\text{f.impar}} \Bigg] =$$

Transformada de Laplace (a variable transformada)

$$= \frac{-2i}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} t e^{-at} \operatorname{sen}\omega t\, dt = \frac{-2i}{(2\pi)^{1/2}} \mathcal{L}_a\left[t \operatorname{sen}\omega t\right] =$$

$$= -\frac{2i}{(2\pi)^{1/2}} \Bigg[\underbrace{-\frac{d}{da}\left[\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\right]}_{\frac{+\omega 2a}{(a^2+\omega^2)^2}} \Bigg] = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{2ia\omega}{(\omega^2+a^2)^2}$$

2.2 $\quad y'' - 4y' + 4y = g(t) \quad t \in [0, +\infty)$

$y(0) = 1$

$y'(0) = -1$

$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$

$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] \quad \mathcal{L}[y''] - 4\mathcal{L}[y'] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[g]$

$$(s^2 Y(s) - s + 1) - 4(sY(s) - 1) + 4Y(s) = G(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \underbrace{\frac{s-5}{(s-2)^2}}_{(i)} + \underbrace{\frac{G(s)}{(s-2)^2}}_{(ii)}$$

(i) $\quad \dfrac{s-5}{(s-2)^2} = \dfrac{A}{(s-2)^2} + \dfrac{B}{(s-2)} \Rightarrow \begin{array}{l} B = 1 \\ A = -3 \end{array}$

$$= \frac{1}{(s-2)} - \frac{3}{(s-2)^2}$$

També $\quad \dfrac{s-5}{(s-2)^2} = \dfrac{s-2}{(s-2)^2} - \dfrac{3}{(s-2)^2} = \dfrac{1}{(s-2)} - \dfrac{3}{(s-2)^2}$

2.2 (CONT.)

$$\mathcal{L}^{-1}[(i)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2} - \frac{3}{(s-2)^2}\right] = e^{2t} - 3te^{2t}$$ 6

$$\mathcal{L}^{-1}[(ii)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{(s-2)^2}\right] = \int_0^t u e^{2u} g(t-u)\,du$$

producte de dos transformades $G(s)$ i $\dfrac{1}{(s-2)^2}$; Apliquem el teorema de convolució

i la solució final es

$$y(t) = e^{2t} - 3te^{2t} + \int_0^t u e^{2u} g(t-u)\,du$$

3.1. $\{\rho,\varphi,z\} \longleftrightarrow \{r,\theta,\varphi\}$

$$\rho = r\sin\theta \qquad r=\sqrt{\rho^2+z^2}$$
$$\varphi=\varphi \qquad \theta = \arctg \rho/z$$
$$z = r\cos\theta \qquad \varphi=\varphi$$

a) $$v = \frac{1}{\rho}\partial_\rho = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial r}{\partial\rho}\partial_r + \frac{\partial\theta}{\partial\rho}\partial_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\partial_\varphi\right] = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\rho}{r}\partial_r + \frac{1}{1+\frac{\rho^2}{z^2}}\,\frac{1}{z}\partial_\theta\right)$$

$$= \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{1}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}\,\frac{1}{r\cos\theta}\partial_\theta = \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\cotg\theta\,\partial_\theta$$

en esfèriques

$$= \frac{1}{r}e_r + \frac{1}{r}\cotg\theta\, e_\theta$$ en esfèriques físiques o ortonormals

b) $$t_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, t_{ij}\, \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \qquad t_{ij}\,dx^i\otimes dx^j = d\rho\otimes d\rho + d\rho\otimes d\varphi - d\varphi\otimes d\rho + dz\otimes dz$$

transposada de la Jacobiana per poder efectuar els càlculs en la forma matricial

Jacobiana

x^i cilíndriques

$x^{i'}$ esfèriques

$$(t_{i'j'}) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ r\cos\theta & 0 & -r\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta & \sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & r\cos\theta & -r\sin\theta \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin\theta \\ 0 & r^2 & r\cos\theta \\ -\sin\theta & -r\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = dr\otimes dr + r^2\, d\theta\otimes d\theta + \sin\theta\,(dr\otimes d\varphi - d\varphi\otimes dr) + r\cos\theta\,(d\theta\otimes d\varphi - d\varphi\otimes d\theta)$$

c) Tenint present que $dr = e^r \quad d\theta = \frac{1}{r}e^\theta \quad d\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}e^\varphi \qquad \left(dx^i = \frac{1}{h_i}e^i\right)$

$$T = e^r\otimes e^r + e^\theta\otimes e^\theta + \frac{1}{r}\left(e^r\otimes e^\varphi - e^\varphi\otimes e^r\right) + \frac{1}{r}\cotg\theta\left(e^\theta\otimes e^\varphi - e^\varphi\otimes e^\theta\right)$$

La matriu de components físiques de T serà, per tant
$$(t_{i''j''}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/r \\ 0 & 1 & \cotg\theta/r \\ -1/r & -\frac{\cotg\theta}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

3.2. $$T = t^{ij}\, e_i\otimes e_j = \frac{1}{h_ih_j}\, t^{ij}\,\partial_{x^i}\otimes\partial_{x^j} =$$

$$= \frac{t^{ij}}{h_ih_j}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\partial_{x^{i'}}\otimes\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\partial_{x^{j'}} = h_{i'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{t^{ij}}{h_ih_j}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\,h_{j'}\; e_{i'}\otimes e_{j'} = t^{i'j'}\, e_{i'}\otimes e_{j'}$$

$$\Rightarrow \quad t^{i'j'} = h_{i'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{t^{ij}}{h_ih_j}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\,h_{j'}$$ expressió que té transcripció matricial immediata.

4.1. $p_r = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^r}{r!}$ $\qquad \varphi(t) = \langle e^{itX}\rangle = \sum_r e^{-\lambda}\dfrac{(\lambda e^{it})^r}{r!} = e^{-\lambda}\cdot \exp(\lambda e^{it})$

característica

cumulant: $\psi(t) = \ln\varphi(t) = -\lambda + \lambda e^{it} = \lambda(e^{it}-1) = \lambda \sum_{r=1}^{\infty}\dfrac{(it)^r}{r!} = \sum \dfrac{k_r (it)^r}{r!}$

$\rightarrow k_r = \lambda \ \forall r \qquad m_1 = \lambda \qquad \mu_2 = \sigma^2 = \lambda \qquad \mu_3 = k_3 = \lambda \qquad \mu_4 = k_4 + 3k_2^2 = \lambda + 3\lambda^2$

$\gamma_a = \dfrac{k_3}{k_2^{3/2}} = \dfrac{\lambda}{\lambda^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \qquad \gamma_c = \dfrac{k_4}{k_2^2} = \dfrac{\lambda}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda}$

4.2. # configuracions B-E : $\dbinom{109}{9} = \dfrac{109\cdot 108\cdot 107 \cdots 101}{9!} \simeq 4.2634\ 10^{12}$

$P_0(\text{cel·la preparada}) = \dfrac{\binom{108}{8}}{\binom{109}{9}} = \dfrac{9}{109} \simeq 0.082569 \simeq 8.25\cancel{7}\ \% = \dfrac{\text{maneres de posar 100 en cel·les}}{\text{maneres de posar 100 en cel·les.}}$

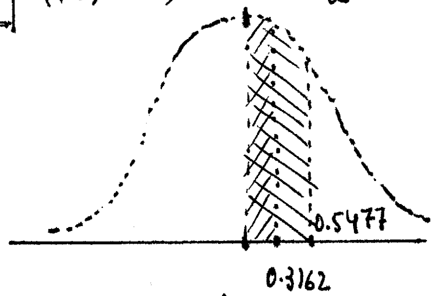
$P_{10}(\text{cel·la preparada}) = \dfrac{\text{maneres de posar 90 en 9 cel·les}}{\binom{109}{9}} = \dfrac{\binom{98}{8}}{\binom{109}{9}} = \dfrac{98\cdot 97\cdot 96 \cdots 91}{109 \cdots 101}\cdot 9 \simeq 0.03691 \simeq 3.7\ \%$

(és força més probable que quedi buida que amb el nombre mig de partícules ~ Condensació de Bose)

4.3. La χ^2 d'un grau de llibertat és la normal standard al quadrat

t_i	regió	|valor de la normal|	per (acumulativa) interp. lineal ($\tilde{p}_i$)	$(\tilde{p}_i - 0.5)\times 2$	p_i regions
10	$(0, 0.1)$	$\sqrt{0.1} = 0.3162$	$0.6217 + 0.62\times 0.0038 = 0.6241$	0.2482	0.2482
10	$(0.1, 0.3)$	$\sqrt{0.3} = 0.5477$	$0.7054 + 0.77\times 0.0034 = 0.7080$	0.4160	0.1678
10	$(0.3, 0.7)$	$\sqrt{0.7} = 0.8367$	$0.7967 + 0.67\times 0.0029 = 0.7986$	0.5972	0.1812
10	$(0.7, 1.7)$	$\sqrt{1.7} = 1.3038$	$0.9032 + 0.38\times 0.0017 = 0.9038$	0.8076	0.2104
10	$(1.7, \infty)$	∞	1	1	0.1924

$\sum p_i = 1$



Esquema visual del càlcul

$\chi^2(1)$ entre $(0, 0.1) \Rightarrow$ normal entre $(-0.3162, 0.3162)$

$(0.1, 0.3) \Rightarrow$ " " $(-0.5477, -0.3162)$ o $(0.3162, 0.5477)$

valors positius i negatius de la normal contribueixen en igual mesura

/// àrea = probabilitat 1ª regió $\quad 2\times(\overset{\rightarrow}{0.6241} - 0.5) = 0.2482 = \tilde{\tilde{p}}_1 = p_1$ $\Big\}\ \vec{p}_i, \tilde{p}_i$ mesures de probabilitat auxiliars

//// 1ª + 2ª regió $\quad 2\times(\underset{\vec{p}_2}{0.7080} - 0.5) = \underset{\tilde{\tilde{p}}_2}{0.4160} \Rightarrow$ 2ª regió χ^2 $0.4160 - 0.2482 = 0.1678 = p_2$

Alternativament

np_i
12.41
8.39
9.06
10.52
9.62

$\chi^2_{\text{test}} = \dfrac{1}{n}\sum \dfrac{t_i^2}{p_i} - n = \dfrac{100}{50}\sum \dfrac{1}{p_i} - 50 = 2\left(\dfrac{1}{0.2482} + \dfrac{1}{0.1678} + \dfrac{1}{0.1812} + \dfrac{1}{0.2104} + \dfrac{1}{0.1924}\right)$

$-50 = 2\times 25.9576 - 50 = 0.9152$

5 regions $\Rightarrow \chi^2$ de 4 graus de llibertat

$\chi^2_{0.05} = 0.711 \qquad \chi^2_{0.10} = 1.06$

Es rebutja la hipòtesi a un nivell de significació del 95 %. però la hipòtesi s'accepta o passa el test a un n.s. del 90 %.

Assignatura: Mètodes Matemàtics de la Física II
Departament: Física Fonamental
Data Examen Final 17 – juny – 2008

1.1 La transformada de Laplace de la funció de Bessel $J_0(ax)$ és

$$\mathcal{L}\left[J_0(ax)\right] = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

Utilitzant les propietats de la transformada de Laplace i les relacions de recurrència de les funcions de Bessel, calculeu $\mathcal{L}\left[J_1(ax)\right]$ a partir de $\mathcal{L}\left[J_0(ax)\right]$.

1.2 Resoleu, fent ús de la transformada de Fourier en la variable x, l'equació diferencial

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\, u(x,t)}{\partial\, t} = 0 \qquad t>0, \quad -\infty < x < +\infty$$

amb la condició inicial

$$u(x,0) = xe^{-x}\,\Theta(x) \quad \text{amb} \quad \Theta(x)=1 \quad \text{per} \quad x>0 \quad \text{i} \quad \Theta(x)=0 \quad \text{per} \quad x<0$$

Expresseu la solució formal en termes d'un producte de convolució.

2. L'equació de Laplace en coordenades polars planes per a una funció $u(r,\theta)$ és:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

a) Trobeu la solució formal mitjançant el mètode de separació de variables.

b) Resoleu l'equació de forma explícita trobant les solucions finites en una regió semicircular limitada per l'eix x i el semicercle $x^2+y^2=a^2, \quad y>0$ amb les condicions següents:

$$u(x,y) = u_0 \quad \text{per} \quad x^2+y^2=a^2, \quad y>0$$
$$u(x,0) = 0 \quad \text{per} \quad x \in (-a,a)$$

Representeu gràficament la regió on es resol l'equació diferencial. No us oblideu de tractar totes les possibilitats segons els diferents valors que pot prendre la constant de separació.

3. Considereu una variable aleatòria real X descrita per una funció densitat

$$f(x) = k\,x^2 \quad \text{per} \quad |x| < a, \quad f(x) = 0 \quad \text{per} \quad |x| > a$$

a) Determineu, en funció d'a, tots els moments ordinaris de la v.a. X.

b) Feu un dibuix qualitatiu de la funció de distribució $F(x)$ i doneu fins al quart ordre la sèrie de Taylor de la funció característica.

c) Determineu el valor d'a de manera que $\sigma^2(X) = 1$. Avalueu, en aquest cas, el coeficient de curtosi $\gamma_2 \equiv \gamma_c = k_4/k_2^2 = (\mu_4/\sigma^4) - 3$.

d) Si $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ amb X_i variables aleatòries estadísticament independents i equidistribuïdes amb la X de l'apartat anterior, estimeu la probabilitat del succés $Y \in (0, 10)$ i justifiqueu l'aproximació utilitzada.

4. En la regió $t > |x|$ d'un espaitemps bidimensional amb mètrica $\mathbf{g} = dt \otimes dt - dx \otimes dx$ en coordenades (t, x), passem a unes noves coordenades (ρ, ξ), definides a través de

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{t^2 - x^2} \\ \xi = \operatorname{arctanh}(x/t) \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \rho \cosh \xi \\ x = \rho \sinh \xi \end{cases}$$

a) Determineu el tensor mètric en les noves coordenades (ρ, ξ).

b) Determineu les components del camp vectorial $\vec{u} = \cosh a\, \partial_t + \sinh a\, \partial_x$ en la base $\{\partial_\rho, \partial_\xi\}$.

c) Construïu el camp covectorial (o forma diferencial) mètricament associat(da) a $\vec{u}$ i trobeu la seva expressió en la base $\{d\rho, d\xi\}$. Del camp covectorial o forma obtingut(da), construïu-ne el camp vectorial tangent associat. Compareu aquest resultat amb l'obtingut a l'apartat anterior.

d) Calculeu explícitament el quadrat de la norma dels diversos camps d'acord amb les expressions tensorials $g_{ij}u^i(t, x)u^j(t, x)$, $\quad g_{i'j'}u^{i'}(\rho, \xi)u^{j'}(\rho, \xi)$, $\quad g^{i'j'}u_{i'}(\rho, \xi)u_{j'}(\rho, \xi)$, i comenteu el resultat obtingut.

Puntuació: 1.1 (1.5 punts); 1.2 (1.5 punts) ; 2 (3 punts); 3 (2 punts); 4 (2 punts)

P 1

$$\mathcal{L}\{J_0(ax)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

Re. $\frac{d}{dx} J_0(x) = - J_1(x)$

$$\frac{d}{dx} J_0(ax) = - a\, J_1(ax)$$

$$\mathcal{L}\{J_1(ax)\} = -\frac{1}{a}\, \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dx} J_0(ax)\right\}$$

$$= -\frac{1}{a}\left[\frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}} - \frac{J_0(0)}{1}\right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{a}\left[1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\right] = \mathcal{L}\{J_1(ax)\}}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \qquad t>0$$

$$-k^2 \hat{u}(k,t) - 2\frac{\partial \hat{u}(k,t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{u}(k,t)}{\partial t} = -\frac{k^2}{2}\hat{u}(k,t)$$

$$\hat{u}(k,t) = \hat{u}(k,0)\, e^{-\frac{k^2}{2}t}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\downarrow \quad \hat{u}(x,t) = \hat{u}(x,0) * \mathcal{F}^{-1}\{e^{-\frac{k^2}{2}t}\}$$

$$= \hat{u}(x,0) * \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$$

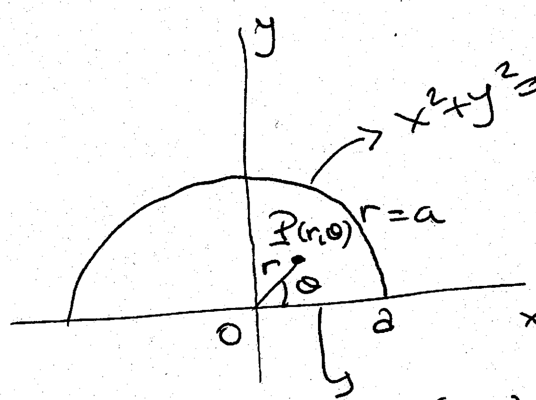
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x')^2/2t}\, \theta(x')\, x' e^{-x'}\, dx'$$

$$\boxed{\hat{u}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-(x-x')^2/2t}\, x' e^{-x'}\, dx'}$$

$u = u(r,\theta)$

$$\nabla^2 u = 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$\rightarrow$



$\rightarrow x^2+y^2=a^2\ (y>0)$ y $u(x,y)=u_0$ en

$u(x,0)=0 \quad x\in(-a,a)$

1 Sol F. Bien
Dib region +
+ Cond cont
finita (1p
+ Det. desarr
coef + Calculo
1 p.

$\rightarrow u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$

$$\Theta(\theta)\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\Theta(r)\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2}R(r)\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0$$

multiplicando por r^2 y dividiendo por $R(r)\Theta(\theta)$ tenemos.

$$\underbrace{\frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{r}{R(r)}\frac{dR}{dr}}_{F(r)} + \underbrace{\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}}_{G(\theta)} = 0 \quad !!\ \forall\, r,\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F(r) = -G(\theta) = cte = \lambda^2\ (\lambda)$$

$$\boxed{r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda^2 R(r) = 0}$$

ⓐ $r^2R''(r) + rR'(r) = \lambda^2 R$;

ⓑ $-\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \lambda^2 \Rightarrow +\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -\lambda^2\Theta(\theta)$; $\boxed{\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda^2\Theta(\theta) = 0}$

ⓐ $R(r) \sim r^p$
$R'(r) \sim p r^{p-1}$
$R''(r) \sim p(p-1) r^{p-2}$ $\Big\} \Rightarrow$ $p(p-1) + p - \lambda^2 = 0$

$p^2 - \lambda^2 = 0$; $p = \pm\lambda$ $(\pm\sqrt{\lambda})$

$$\boxed{R(r) = Ar^{\lambda} + Br^{-\lambda}}$$

$\rightarrow \Theta(\theta) \sim e^{p\theta}$
$\Theta''(\theta) \sim p^2 e^{p\theta}$ $\Big\}$ $p^2 + \lambda^2 = 0$; $p = \pm i\lambda$; $\pm i\sqrt{\lambda}$

$\Theta(\theta) = Ce^{i\lambda\theta} + De^{-i\lambda\theta}$

$e^{i\sqrt{\lambda}\theta} + e^{-i\sqrt{\lambda}\theta}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ (SL regular)
Sols. $A\operatorname{senh}\sqrt{\lambda}\theta + B\cosh\sqrt{\lambda}\theta$
$A\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\theta + B\cos\sqrt{\lambda}\theta$
$A + Bx$ $(\lambda=0)$

P2 b

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

$$u(r,0) = R(r)\Theta(0) = 0$$
$$u(r,\pi) = R(r)\Theta(\pi) = 0 \quad \forall r \in (-a,a) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\Theta(0)=0\\ \Theta(\pi)=0\end{array}}$$

$\lambda = 0$ NO es compatible!! Cond. contorno homogéneas $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Theta(0) = 0 = C + D \Rightarrow C = -D$$
$$\Theta(\pi) = 0 = Ce^{i\lambda\pi} + De^{-i\lambda\pi} = C\left[e^{i\lambda\pi} - e^{-i\lambda\pi}\right] =$$
$$= 2iC\,\mathrm{sen}\,\lambda\pi = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda = n \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\Theta(\theta) = C\,\mathrm{sen}\,n\theta$$

Para tener soluciones finitas en $r = 0$; $B = 0$. Luego la solución queda

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\nearrow CA}{A_n} r^n\,\mathrm{sen}\,n\theta$$

Como $u(a,\theta) = u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{a^n}\,\mathrm{sen}\,n\theta \quad (0 < \theta < \pi) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ multiplicando por $\mathrm{sen}\,m\theta$ e $\int$ se tiene que en general

$$a^n A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0\,\mathrm{sen}\,n\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{2u_0}{\pi}\frac{1}{n}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, \ldots \\ \dfrac{4u_0}{n\pi} & n = 1, 3, 5 \ldots \end{cases}$$

Si llamamos $n = 2k+1 \quad (k = 0, 1, 2 \ldots)$

$$a^{2k+1} A_{2k+1} = \frac{4u_0}{(2k+1)\pi}$$

y tenemos finalmente

$$u(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4u_0}{(2k+1)\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1} \mathrm{sen}\,(2k+1)\theta$$

P3.

(A) $f(x) = kx^2$

Normalització $\quad 2\int_0^a kx^2\,dx = \frac{2ka^3}{3} = 1 \qquad k = \frac{3}{2a^3} \qquad m_n = 0 \quad n$ senar

$m_1 = m_3 = m_5 = \dots = 0$

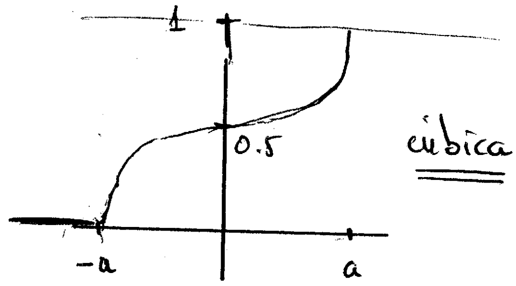
$m_n = 2\int_0^a \frac{3}{2a^3} x^{n+2}\,dx = \frac{3}{n+3} a^n$ (n parell) $\qquad m_1 = 0 \Rightarrow m_{2n} = \mu_{2n}$

(B) $F(x) = \int_{-a}^{x} f(y)\,dy = \int_{-a}^{x} \frac{3}{2a^3} y^2\,dy = \frac{1}{2a^3}(x^3 + a^3)$

$= 0$ per $x = -a$

$= \frac{1}{2}$ per $x = 0$

$= 1$ per $x = a$



cúbica

$\varphi(t) = \sum m_r \frac{(it)^r}{r!} =$

$= -m_2 \frac{t^2}{2!} + m_4 \frac{t^4}{4!} + \dots =$

$= -\frac{3}{10} a^2 t^2 + \frac{3}{7 \cdot 24} a^4 t^4 + \dots = -0.3 a^2 t^2 + \frac{a^4}{56} t^4 + \dots$

(C) $k_2 = \sigma^2 = \mu_2 = m_2 = \frac{3}{5} a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{5}{3}}$

$\gamma_2 \equiv \gamma_c = \frac{k_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \underset{\substack{\sigma=1 \\ \mu_4 = m_4}}{=} m_4 - 3 = \frac{3}{7} a^4 - 3 = \frac{3}{7}\frac{25}{9} - 3 = \frac{25}{21} - 3 =$

$= -\frac{38}{21}$ negativa, com correspon a l'aplatanament central

(D) $y = \sum_{i=1}^{100} x_i$ equidistr i independents $\rightarrow m_1(y) = 100\, m_1(x) = 0$

$\sigma^2(y) = 100\, \sigma^2(x) = 100 \qquad \sigma(y) = 10$

$k_4(y) = 100\, k_4(x) = -\frac{3800}{21}$

$\gamma_c(y) = \frac{k_4(y)}{\sigma^4(y)} = -\frac{38}{2100}$ força petita $\rightarrow$ $\gamma_1 = \gamma_a = 0$, $\gamma_2 = \gamma_c \approx 0$ Aprox. normal pel TLC

$P(y \in (0, \sigma)) = fer(1) - fer(0) = 0.8413 - 0.5 = 0.3413 \quad \sim 34\%$

$\rightarrow$ normal

P 4

$t = \rho \,\mathrm{ch}\, \xi$

$x = \rho \,\mathrm{sh}\, \xi$

Resolució estrictament per mètode (notació) matricial.

$$\frac{\partial(t,x)}{\partial(\rho,\xi)} = \frac{\partial x^i}{\partial y^{i'}} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi & \rho\,\mathrm{sh}\,\xi \\ \mathrm{sh}\,\xi & \rho\,\mathrm{ch}\,\xi \end{pmatrix} = (a^i{}_{i'}) \qquad (a_{i'}{}^i) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi & \mathrm{sh}\,\xi \\ \rho\,\mathrm{sh}\,\xi & \rho\,\mathrm{ch}\,\xi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial y^{i'}}{\partial x^i} = \frac{\partial(\rho,\xi)}{\partial(t,x)} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\,\mathrm{ch}\,\xi & -\rho\,\mathrm{sh}\,\xi \\ -\mathrm{sh}\,\xi & \mathrm{ch}\,\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi & -\mathrm{sh}\,\xi \\ -\frac{\mathrm{sh}\,\xi}{\rho} & \frac{\mathrm{ch}\,\xi}{\rho} \end{pmatrix} = (a^{i'}{}_i)$$

$$(a_i{}^{i'}) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi & -\frac{\mathrm{sh}\,\xi}{\rho} \\ -\mathrm{sh}\,\xi & \frac{\mathrm{ch}\,\xi}{\rho} \end{pmatrix}$$

(A) $$g_{i'j'} = a_{i'}{}^i g_{ij} a^j{}_{j'} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi & \mathrm{sh}\,\xi \\ \rho\,\mathrm{sh}\,\xi & \rho\,\mathrm{ch}\,\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi & \rho\,\mathrm{sh}\,\xi \\ \mathrm{sh}\,\xi & \rho\,\mathrm{ch}\,\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\rho^2 \end{pmatrix}$$

(B) $$u^{i'} = a^{i'}{}_i u^i \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi & -\mathrm{sh}\,\xi \\ -\frac{\mathrm{sh}\,\xi}{\rho} & \frac{\mathrm{ch}\,\xi}{\rho} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,a \\ \mathrm{sh}\,a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi\,\mathrm{ch}\,a - \mathrm{sh}\,\xi\,\mathrm{sh}\,a \\ \frac{1}{\rho}(-\mathrm{sh}\,\xi\,\mathrm{ch}\,a + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(a-\xi) \\ \frac{1}{\rho}\,\mathrm{sh}(a-\xi) \end{pmatrix} \; *$$

$$u = \mathrm{ch}\,a\,\partial_t + \mathrm{sh}\,a\,\partial_x = \mathrm{ch}(a-\xi)\,\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{sh}(a-\xi)\,\partial_\xi$$

(C)

$$u_i = g_{ij} u^j \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,a \\ \mathrm{sh}\,a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,a \\ -\mathrm{sh}\,a \end{pmatrix}$$

u vector $\to$ u covector o forma $=$ $= \mathrm{ch}\,a\,dt - \mathrm{sh}\,a\,dx$

$$u_{i'} = a_{i'}{}^i u_i \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi & \mathrm{sh}\,\xi \\ \rho\,\mathrm{sh}\,\xi & \rho\,\mathrm{ch}\,\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,a \\ -\mathrm{sh}\,a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\xi\,\mathrm{ch}\,a - \mathrm{sh}\,\xi\,\mathrm{sh}\,a \\ \rho(\mathrm{sh}\,\xi\,\mathrm{ch}\,a - \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\xi-a) \\ \rho\,\mathrm{sh}(\xi-a) \end{pmatrix}$$

$$u\ (\text{covector}) = \mathrm{ch}(a-\xi) + \rho\,\mathrm{sh}(\xi-a) = \mathrm{ch}(a-\xi) - \rho\,\mathrm{sh}(a-\xi)$$

$$u^{i'} = g^{i'j'} u_{j'} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/\rho^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(a-\xi) \\ -\rho\,\mathrm{sh}(a-\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(a-\xi) \\ \frac{1}{\rho}\,\mathrm{sh}(a-\xi) \end{pmatrix}$$

coincident amb * (B)

$$\begin{tikzcd} u^i \arrow[r, "\text{Canvi coordenades } \boxed{b}"] \arrow[d, "\text{baixar índex } b"'] \arrow[dr, phantom, "\cancel{\text{Diagrama commutatiu}}"] & u^{i'} \\ u_i \arrow[r, "\text{canviar coordenades}"'] & u_{i'} \arrow[u, "\# \text{ pujar l'índex}"'] \end{tikzcd}$$

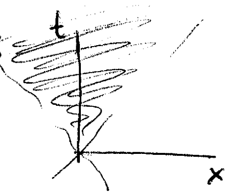
Físicament el camp és sempre el mateix camp "vectorial" u ja que canviar les coordenades i contraure amb la mètrica corresponen a diferents possibilitats de representació d'un mateix objecte

(d) La norma és, per tant, sempre la mateixa, es calculi en el "vèrtex" que es calculi

$$\begin{array}{ccc} g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} & \longleftrightarrow & g_{i'j'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\rho^2 \end{pmatrix} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} & \longleftrightarrow & g^{i'j'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/\rho^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

exemple $\rightsquigarrow$ $$(\mathrm{ch}(\xi-a), \rho\,\mathrm{sh}(\xi-a))\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/\rho^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\xi-a) \\ \rho\,\mathrm{sh}(\xi-a) \end{pmatrix} = 1$$

4 bis



$\rho = \sqrt{t^2 - x^2}$ $\qquad t = \rho \operatorname{ch}\xi$

$\xi = \operatorname{arctgh} \frac{x}{t}$ $\qquad x = \rho \operatorname{sh}\xi$

Apartat b: c pts
de manera alternativa al càlcul matricial

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = d\rho^2 - \rho^2 d\xi^2 \qquad \left(\eta_{ij}(\rho,\xi)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\rho^2 \end{pmatrix}$$

$$dt = \operatorname{ch}\xi\, d\rho + \rho \operatorname{sh}\xi\, d\xi$$

$$dx = \operatorname{sh}\xi\, d\rho + \rho \operatorname{ch}\xi\, d\xi$$

$$u = \operatorname{ch}a\, \partial_t + \operatorname{sh}a\, \partial_x = \operatorname{ch}a \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} \partial_\rho + \frac{\partial\xi}{\partial t} \partial_\xi \right) + \operatorname{sh}a \left(\frac{\partial\rho}{\partial x} \partial_\rho + \frac{\partial\xi}{\partial x} \partial_\xi \right) =$$

$$= \operatorname{ch}a \left[\frac{t}{\rho} \partial_\rho + \frac{-x/t^2}{1 - x^2/t^2} \partial_\xi \right] + \operatorname{sh}a \left(\frac{-x}{\rho} \partial_\rho + \frac{1/t}{1 - x^2/t^2} \partial_\xi \right)$$

$$= \operatorname{ch}a \operatorname{ch}\xi\, \partial_\rho - \frac{\operatorname{ch}a \operatorname{sh}\xi}{\rho} \partial_\xi - \operatorname{sh}a \operatorname{sh}\xi\, \partial_\rho + \frac{\operatorname{sh}a \operatorname{ch}\xi}{\rho} \partial_\xi$$

$$= (\operatorname{ch}a \operatorname{ch}\xi - \operatorname{sh}a \operatorname{sh}\xi)\partial_\rho + \frac{1}{\rho}(\operatorname{sh}a \operatorname{ch}\xi - \operatorname{ch}a \operatorname{sh}\xi)\partial_\xi =$$

$$= \operatorname{ch}(a-\xi)\, \partial_\rho + \frac{1}{\rho} \operatorname{sh}(a-\xi)\, \partial_\xi$$

$$u_{cov} = u_i\, dx^i = \operatorname{ch}a\, dt - \operatorname{sh}a\, dx = \operatorname{ch}a \operatorname{ch}\xi\, d\rho + \rho \operatorname{ch}a \operatorname{sh}\xi\, d\xi - \operatorname{sh}a \operatorname{sh}\xi\, d\rho - \rho \operatorname{sh}a \operatorname{ch}\xi\, d\xi$$

$$= (\operatorname{ch}a \operatorname{ch}\xi - \operatorname{sh}a \operatorname{sh}\xi)\, d\rho - \rho\, (\operatorname{sh}a \operatorname{ch}\xi - \operatorname{ch}a \operatorname{sh}\xi)\, d\xi$$

$$= \operatorname{ch}(a-\xi)\, d\rho - \rho \operatorname{sh}(a-\xi)\, \partial_\xi = u_{i'}(y)\, dy^{i'}$$

$$u^{i'} = g^{i'j'}(y)\, u_{j'} \quad \leadsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/\rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(a-\xi) \\ -\rho \operatorname{sh}(a-\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(a-\xi) \\ \frac{1}{\rho} \operatorname{sh}(a-\xi) \end{pmatrix}$$

que coincideix amb el resultat obtingut per transformació directa del vector contravariant.

ASSIGNATURA: Mètodes Matemàtics de la Física II
DEPARTAMENT: Física Fonamental
DATA EXAMEN FINAL 23 – juny – 2009

1. P1 (1 punt). Determineu els cumulants de les dues variables aleatòries $Z = 2(X-1), \quad T = Y-2$ si X i Y són variables aleatòries de Poisson de paràmetres 1 i 2, respectivament. Si definim $U = \sum_1^{5000} T_i, \quad V = \sum_1^n Z_i$ amb T_i, Z_i estadísticament independents i equidistribuïdes amb T i Z respectivament, determineu n de manera que U i V tinguin
   - a) la mateixa variança,
   - b) la mateixa asimetria,
   - c) la mateixa curtosi.

2. P2 (1 punt). Un mòbil en el pla efectua cada segon un moviment horitzontal i un moviment vertical independents, regits tots dos per la llei de probabilitat $0.5(\delta_{-1} + \delta_1)$. Quina és la probabilitat, en aproximació normal i tenint present la correcció de continuïtat, que als 200 segons de la sortida de l'origen de coordenades, el mòbil estigui situat a l'interior o sobre un quadrat de costat 40 centrat a l'origen? Quin és el tamany mínim del quadrat centrat a l'origen que (comptant la vora) conté després de 200 segons un 10% dels mòbils que han sortit de l'origen?

3. T1 (1 punt). Considereu a l'espai de Minkowski els sistemes de referència inercials E, E', E'', H', H'' amb vectors base $e_\mu, e_{\mu'}, e_{\mu''}, h_{\mu'}, h_{\mu''}$ respectivament, tots ells relacionats per les expressions:
$$e_{\mu'} = A^{\mu}{}_{\mu'} e_\mu, \quad e_{\mu''} = B^{\mu'}{}_{\mu''} e_{\mu'}, \quad h_{\mu'} = B^{\mu}{}_{\mu'} e_\mu, \quad h_{\mu''} = A^{\mu'}{}_{\mu''} h_{\mu'}$$
on les dues matrius A i B corresponen a transformacions pures de Lorentz (*boosts*) de manera que E' es mou amb rapidesa 1 en la direcció e_1 i H' amb rapidesa 1 en la direcció e_2. Tenint present el significat físic dels vectors $e_{0''}$ i $h_{0''}$, determineu numèricament en el sistema de referència E, el mòdul de la velocitat (preneu c=1) i la corresponent direcció (angle amb l'eix e_1) amb què es mouen els sistemes E'' i H''.

4. T2 (1 punt). Determineu la mètrica 2-covariant induïda sobre el paraboloïde $z = x^2 + y^2$ per la mètrica euclídea (via *pull-back*)
   - Si considerem coordenades p, q i la immersió en cartesianes $x = p, \quad y = q, \quad z = p^2 + q^2$.
   - Si considerem coordenades r, ϕ i la immersió en cilíndriques $\rho = r, \quad \theta = \phi, \quad z = r^2$

5. ED (2.5 punts). Tots els punts d'una corda de densitat uniforme i longitud l estan sotmesos a una tensió mentre els seus extrems estan fixats. Si perturbem la seva configuració d'equilibri la corda efectua petites oscil·lacions transversals donades per la funció $u(x,t)$ que mesura el desplaçament de cada punt de la corda respecte de l'horitzontal a l'instant t. L'equació del moviment (equació d'ones) és:
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l,\ t > 0), \{u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0\}$$
on c és una constant amb dimensions de velocitat. Resoleu l'equació d'ones si a l'instant $t = 0$ la corda està pinçada en el punt $x = b$ que queda separat una distància ϵ de l'horitzontal i tots els punts estan en repòs. Quines són les condicions inicials?.

6. FE (1.5 punts). Considereu la solució $y(x)$ de l'equació de Bessel d'ordre ν i el canvi $u(x) = \sqrt{x}\, y(x)$ per a $x > 0$.

- Demostreu que $u(x)$ satisfà la següent equació diferencial:

$$u'' + (1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2})\, u = 0$$

.

- Resoleu l'equació anterior quan $4\nu^2 = 1$. Com s'escriuria la solució $y(x)$ en aquest cas?
- Utilitzeu que $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$ i l'expressió general en sèrie de potències per a $J_{\pm\nu}(x)$ per a demostrar que per a $x > 0$ es verifica

$$J_{1/2}(x) = (\frac{2}{\pi x})^{1/2} \sin(x), \quad J_{-1/2}(x) = (\frac{2}{\pi x})^{1/2} \cos(x)$$

.

7. TI (2 punts). Fent servir la següent definició de la transformada de Fourier d'una funció $f(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(ikx) dx$$

- Calculeu la transformada de Fourier de les funcions:
  a) $H(1 - |x|) = \{1 \text{ per } |x| < 1; \quad 0 \text{ per } |x| > 1\}$ (rectangle unitat).
  b) $\exp(-a|x|),\ a > 0$.
- Resoleu l'equació diferencial

$$y'' - y = -H(1 - |x|) \quad -\infty < x < \infty, \quad y(x) \to 0,\ y'(x) \to 0 \text{ per } |x| \to \infty$$

  nota: escriviu la solució com a una integral de convolució sense calcular-la i tingueu present que $\mathcal{F}[y''(x)] = -k^2\, \mathcal{F}[y(x)] = -k^2 F(k)$

① P1. (De la teoria: $Y = aX + b$ $\quad k_1(Y) = b + a\,k_1(X)$
$k_r(Y) = a^r k_r(X) \quad r \geq 2$)

Per a les v.a. del problema tenim: $k_r(X) = 1$, $k_r(Y) = 2 \quad \forall r$

	$Z = 2(X-1)$	$T = Y - 2$	$U = \sum^{5000} T_i$	$V = \sum^{n} Z_i$
k_1	0	0	0	0
k_2	4	2	10.000	$4n$
k_3	8	2	10.000	$8n$
k_4	16	2	10.000	$16n$

a) $\sigma^2(U) = \sigma^2(V)$ $\qquad 10000 = 4n \qquad n = 2500$

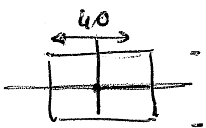
b) $\gamma_a(U) = \gamma_a(V)$ $\qquad \dfrac{10.000}{(10000)^{3/2}} = \dfrac{1}{100} = \dfrac{8n}{(4n)^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \qquad n = 10.000$

c) $\gamma_e(U) = \gamma_e(V)$ $\qquad \dfrac{1}{10.000} = \dfrac{16n}{(4n)^2} = \dfrac{1}{n} \qquad n = 10.000$

② P2. $Z = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$ $\qquad k_1 = 0$
$k_2 = m_2 = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

$X = \sum_1^{200} Z_i$ independents
$Y = \sum_1^{200} Z_i'$ independents

$k_1(X) = k_1(Y) = 0$
$k_2(X) = k_2(Y) = 200 \qquad \sigma_X = \sqrt{200} = 14.1421 = \sigma_Y$
(aprox. normal $m = 0$, $\sigma = \sqrt{200}$)



$-20.5 \leq X_{apr.normal} \leq 20.5$
$-20.5 < Y_{apr.normal} < 20.5$
independentment → producte de probabilitats.

$X_{Tip} = \dfrac{20.5}{\sqrt{200}} \simeq 1.45 \qquad \text{per}(1.45) = 0.9265$

a) $P(X,Y)$ dins el quadrat costat 40 $= (2 \times 0.4265)^2 = 0.7276$
$\simeq 73\ \%$

b) Hem de determinar $\hat{x}_{tip}$ de manera que $\text{per}(\hat{x}_{tip}) = y$ on

$[2 \times (y - 0.5)]^2 = 0.1 \qquad \sqrt{0.025} = 0.1581 \qquad y = 0.6581$

per $(0.40) = 0.6554$
per $(0.41) = 0.6591$ → destipificant $\quad 0.4073 \times \sqrt{200} = 5.76$

El quadrat de costat $= \frac{1}{2}$ està associat (correcció de continuïtat) a una $X_{apr.usual} = 5.5$ que no arriba. El de costat 12 ja conté el 10% de probabilitat → el quadrat de costat 12 és la solució demanada (supera el 10%)

[illegible] el raonament seguit en a).

T1 (3)

$$e_{\mu''} = B^{\mu'}{}_{\mu''} A^{\mu}{}_{\mu'} e_{\mu} = A^{\mu}{}_{\mu'} B^{\mu'}{}_{\mu''} e_{\mu}$$

$$h_{\mu''} = A^{\mu'}{}_{\mu''} B^{\mu}{}_{\mu'} e_{\mu} = B^{\mu}{}_{\mu'} A^{\mu'}{}_{\mu''} e_{\mu}$$

$e_0, e_{0'}, h_{0'} \dots$ s'interpreten com els vectors quadrivelocitat dels respectius sistemes de referència. En una transformació lineal de coordenades, la Jacobiana coincideix amb la matriu de transformació.

$$x^{\mu} = A^{\mu}{}_{\mu'} x^{\mu'}$$

$e_{\mu'} = A^{\mu}{}_{\mu'} e_{\mu}$ $\quad E'$ en la direcció $e_1 \Rightarrow$ $\left(e_{0'} = ch\,1\, e_0 + sh\,1\, e_1 \right.$ atenció al signe! $\left.\right)$

$$A = \begin{bmatrix} ch\,1 & sh\,1 & 0 & 0 \\ sh\,1 & ch\,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x = sh\,1\, x^{0'} + ch\,1\, x'$

atenció al signe. Per x' constant x creix amb el pas del temps.

$h_{\mu'} = B^{\mu}{}_{\mu'} e_{\mu}$ $\quad H'$ en la direcció $e_2 \Rightarrow$

$$B = \begin{bmatrix} ch\,1 & 0 & sh\,1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sh\,1 & 0 & ch\,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ch^2 1 & sh\,1 & ch\,1\, sh\,1 & 0 \\ sh\,1\, ch\,1 & ch\,1 & sh^2 1 & 0 \\ sh\,1 & 0 & ch\,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

les transformacions no commuten!!

$$BA = \begin{bmatrix} ch^2 1 & ch\,1\, sh\,1 & sh\,1 & 0 \\ sh\,1 & ch\,1 & 0 & 0 \\ sh\,1\, ch\,1 & sh^2 1 & ch\,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(AB)^{\mu}{}_{\mu''} e_{\mu} = e_{\mu''}$ $\qquad e_{0''} = ch^2 1\, e_0 + sh\,1\, ch\,1\, e_1 + sh\,1\, e_2 = ch\,\xi\, e_0 + sh\,\xi\, \hat{k}_i e_i$

$(BA)^{\mu}{}_{\mu''} e_{\mu} = h_{\mu''}$ $\qquad h_{0''} = ch^2 1\, e_0 + sh\,1\, e_1 + sh\,1\, ch\,1\, e_2 = ch\,\xi\, e_0 + sh\,\xi\, \hat{v}_i e_i$

$\xi = 1.5133 \quad |v| = 0.9075$ $\qquad tg(e_{0''}) = 0.6480 \quad \theta_1 = 32°\ 56'\ 43.5''$

$tg(h_{0''}) = \qquad \theta_2 = 57°\ 3'\ 16.5''$

(Addicional.)

comprovació normalització: $ch^4 1 - (sh^2 1 + sh^2 1\, ch^2 1) = ch^2 1 (1 + sh^2 1) - (1 + ch^2 1) sh^2 1 = ch^2 1 - sh^2 1 = 1$

$$X^{\mu} e_{\mu} = X^{\mu''} e_{\mu''} \qquad X^{\mu} = (AB)^{\mu}{}_{\mu''} X^{\mu''}$$

Al nivell $\left\{ \begin{matrix} \text{més} \\ \text{força} \\ \text{sovint} \end{matrix} \right\}$ habitual de presentar la transformació com a canvi de coordenades tenim ↗

$$\begin{cases} x^0 = ch^2 1\, x^{0''} + sh\,1\, x^{1''} + ch\,1\, sh\,1\, x^{2''} \\ x^1 = sh\,1\, ch\,1\, x^{0''} + ch\,1\, x^{1''} + sh^2 1\, x^{2''} \\ x^2 = sh\,1\, x^{0''} + ch\,1\, x^{2''} \\ x^3 = x^{3''} \end{cases}$$

com a conjunt d'equacions que donen la transformació de Lorentz que relaciona E amb E''

- De manera semblant (lectura per files) de la matriu BA relacionaríem les coordenades associades a E amb les associades a H''.

(4) T2. Paraboloide $\xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^3$ (Plantejament)

$g_{ab}\, dy^a \otimes dy^b \xleftarrow{i^*} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2$ en cartesianes

(pull-back de tensor covariant) $= d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2$ en cilíndriques

$a,b: 1,2$ $\qquad$ $i,j: 1 \ldots 3$

$(p,q) \xhookrightarrow{i} \begin{array}{l} x = p \\ y = q \\ z = p^2 + q^2 \end{array}$ $\qquad$ $(r,\varphi) \xhookrightarrow{i} \begin{array}{l} \rho = r \\ \theta = \varphi \\ z = r^2 \end{array}$

Resolució pròpiament dita

a) $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dp^2 + dq^2 + (2p\,dp + 2q\,dq)^2 = (1+4p^2)\,dp^2 + (1+4q^2)\,dq^2 + 8pq\,dp\,dq$

d'on deduïm el tensor mètric $g_{ab}\, dy^a \otimes dy^b = (1+4p^2)\, dp \otimes dp + (1+4q^2)\, dq \otimes dq + 4pq\, dp \otimes dq \rightsquigarrow (g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1+4p^2 & 2pq \\ 2pq & 1+4q^2 \end{pmatrix}$

b) $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + (2r\,dr)^2 =$

$= dr^2 (1+4r^2) + d\varphi^2 \cdot r^2 \rightsquigarrow g_{ab}\, dy^a \otimes dy^b = (1+4r^2)\, dr \otimes dr + r^2\, d\varphi \otimes d\varphi$

matricialment $(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1+4r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$

Alternativament podem procedir a partir de la llei de transformació de les components dels tensors covariants (pull-back de l'aplicació diferencial en coordenades)

$g_{ab}(y) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a} g_{ij}(x) \frac{\partial x^j}{\partial y^b}$ $\qquad$ $g(y) = (\text{Jacob})^T g(x)\ \text{Jacob}.$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2p \\ 0 & 1 & 2q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2p & 2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4p^2 & 4pq \\ 4pq & 1+4q^2 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ com abans a partir de la matriu

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2r \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2r \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \\ 2r & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1+4r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ com abans el tensor a partir de la matriu.

PROBLEMA 5

$$y_{tt}(x,t) = c^2 y_{xx}(x,t) \qquad (0<x<\ell,\ t>0)$$

$$y(0,t)=0\ ,\ y(\ell,t)=0\ ,\ y_t(x,0)=0\ ,\ y(x,0)=f(x)$$

$$f(x)=\begin{cases} (\varepsilon/b)x & ,\ 0<x<b \\ \dfrac{\varepsilon}{b-\ell}(x-\ell) & ,\ b<x<\ell \end{cases}$$

$$y(x,t)=X(x)\,T(t)$$

$$X''(x)+\lambda X=0\ ;\ X(0)=0\ ,\ X(\ell)=0$$

$$X_n=\sin(n\pi x/\ell)\ ,\ \lambda_n=(n\pi/\ell)^2 \quad (n=1,2,\dots)$$

$$T''(t)+\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 T(t)=0\ ,\quad T'(0)=0$$

$$T_n(t)=\cos(n\pi c t/\ell)$$

$$Y_n(x,t)=X_n(x)\,T_n(t)=\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{n\pi c t}{\ell}\right) \quad (n=1,2,\dots)$$

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{n\pi c t}{\ell}\right)$$

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx = \frac{2\varepsilon \ell^2}{\pi^2 b(\ell-b)}\,\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}b\right)$$

(veure appendix 1)

$$y(x,t)=\frac{2\varepsilon\ell^2}{\pi^2 b(\ell-b)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi b}{\ell}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}ct\right)$$

Apendix 1

$$b_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi}{l}x\,dx = \overbrace{\frac{2\varepsilon}{lb}\int_0^b x\sin\frac{m\pi}{l}x\,dx}^{\mathrm{I}} +$$

$$\underbrace{\frac{2\varepsilon}{l(b-l)}\int_b^l (x-l)\sin\frac{m\pi}{l}x\,dx}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I} = \frac{l^2}{(m\pi)^2}\left(\sin\frac{m\pi}{l}b - \frac{m\pi}{l}b\cos\frac{m\pi}{l}b\right) = \frac{l}{m\pi}\left(\frac{l}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{l}b - b\cos\frac{m\pi}{l}b\right)$$

$$\mathrm{II} = -\frac{l}{m\pi}\left(\frac{l}{m\pi}\sin\frac{m\pi b}{l} - b\cos\frac{m\pi b}{l} + l\cos\frac{m\pi b}{l}\right)$$

$$b_m = \frac{2\varepsilon}{lb}\mathrm{I} + \frac{2\varepsilon}{l(b-l)}\mathrm{II} = \left(\frac{2\varepsilon}{lb} - \frac{2\varepsilon}{l(b-l)}\right)\frac{l^2}{(m\pi)^2}\sin\frac{m\pi}{l}b -$$

$$+\underbrace{\left(\frac{2\varepsilon b}{lb} - \frac{2\varepsilon b}{l(b-l)} + \frac{2\varepsilon l}{l(b-l)}\right)}_{\frac{2\varepsilon}{l}\left(\frac{b-l-b+l}{b-l}\right) = 0}\frac{l}{m\pi}\cos\frac{m\pi b}{l}$$

$$b_m = \frac{2\varepsilon\, l^2}{b(l-b)\,m^2\pi^2}$$

6. FE

Dada $\boxed{x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0}$ Ec. Bessel orden ν

Para $x>0$, hacemos $u(x)=\sqrt{x}\,y(x)=x^{1/2}y(x)$

∴ $u(x)$ satisface

$$u''(x)+\left(1+\frac{1-4\nu^2}{4x^2}\right)u(x)=0$$

$y(x)=x^{-1/2}u(x)$; $y'(x)=-\frac{1}{2}x^{-3/2}u(x)+x^{-1/2}u'(x)$

$$y''(x)=\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)x^{-5/2}u(x)-\tfrac{1}{2}x^{-3/2}u'(x)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)x^{-3/2}u'(x)$$
$$+x^{-1/2}u''(x)=$$
$$=\frac{3}{4}x^{-5/2}u(x)-x^{-3/2}u'(x)+x^{-1/2}u''(x)$$

$$x^2y''=\frac{3}{4}x^{-1/2}u(x)-x^{1/2}u'(x)+x^{3/2}u''(x)$$
$$xy'=-\frac{1}{2}x^{-1/2}u(x)+x^{1/2}u'(x)$$
$$(x^2-\nu^2)y=(x^2-\nu^2)x^{-1/2}u(x)$$

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=\left(\frac{3}{4}x^{-1/2}-\frac{1}{2}x^{-1/2}+(x^2-\nu^2)x^{-1/2}\right)u(x)$$
$$+\cancel{\left(-x^{1/2}u'(x)+x^{1/2}u'(x)\right)}+x^{3/2}u''(x)=$$

$$=\Big(\underbrace{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}_{1/4}+(x^2-\nu^2)\Big)x^{-1/2}u(x)+x^{3/2}u''(x)=0$$

multiplicando por $x^{-3/2}$ queda $u''(x)+\left(\frac{1}{4x^2}+1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)u(x)=0$

$$\Rightarrow \boxed{u''(x)+\left(1+\frac{1-4\nu^2}{4x^2}\right)u(x)=0}$$ c.q.d.

(≈ oscilador armónico simple con $\omega_0^2=1$!)

Cuando $4\nu^2=1 \Rightarrow \nu=\pm 1/2$, la ecuación queda $u''(x)+u(x)=0$

cuya solución es $u(x)=A\operatorname{sen}x+B\cos x$ y la solución para $y(x)=\frac{u(x)}{\sqrt{x}}=\frac{A}{\sqrt{x}}\operatorname{sen}x+\frac{B}{\sqrt{x}}\cos x$ $(x>0)$

Como la solución de la ec de Bessel para $\nu=1/2$ es

$$y(x)=C_1J_{1/2}(x)+C_2J_{-1/2}(x)$$

vemos que, $J_{1/2}(x)\propto\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}$ para fijarlo utilizamos $\longrightarrow$

$J_{-1/2}(x)\propto\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

series que definen $J_{\pm\nu}(x)$ para $\nu = 1/2$ y las correspondientes al sen x y cos x viendo fácilmente que

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen} x$$

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x$$

Tenemos que

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2\nu+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\,(2\nu+2)\cdot(2\nu+4)} \dots \right\}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

y

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Si $\nu = 1/2$

$$J_{1/2}(x) = \frac{x^{1/2}}{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{\underbrace{2\cdot 3}_{3!}} + \frac{x^4}{\underbrace{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5}_{5!}} - \dots \right\}$$

$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$$= \frac{\overbrace{x^{1/2}\cdot x^{1/2}}^{x}}{2^{1/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot x^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x \quad !$$

Si $\nu = -1/2$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

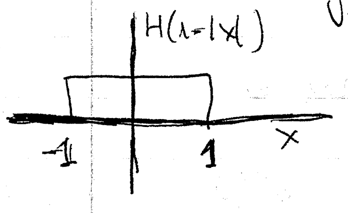
$$J_{-1/2}(x) = \frac{x^{-1/2}}{2^{-1/2}\sqrt{\pi}} \left\{ 1 - \frac{x^2}{\underbrace{2\cdot 1}_{2!}} + \frac{x^4}{\underbrace{2\cdot 4\cdot 1\cdot 3}_{3!}} - \dots \right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad !$$

(7) $$\mathcal{F}[f(x)] = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ikx}\, dx$$

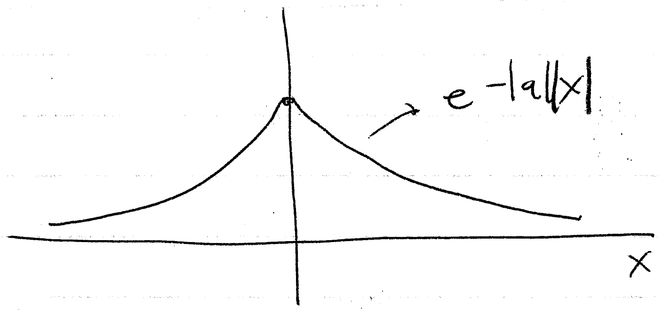
a) $$\mathcal{F}\left[H(1-|x|)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(1-|x|)\, e^{ikx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left.\frac{e^{ikx}}{ik}\right|_{-1}^{+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ik}-e^{-ik}}{ik} =$$



$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\cancel{i}k}\, 2\cancel{i} \operatorname{sen} k = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen} k}{k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen} k}{k}$$

b) $$\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}\, e^{ikx}\, dx =$$
$a > 0$



función par!

$$\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} (\cos kx + i \operatorname{sen} kx)\, dx \right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos kx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}_a[\cos kx] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{a^2+k^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}$$

La ecuación diferencial $y'' - y = -H(1-|x|)$

$$\mathcal{F}[y''(x)] - \mathcal{F}[y(x)] = -\mathcal{F}[H(1-|x|)]$$

$-\infty < x < +\infty$
$y(x) \to 0$
$y'(x) \to 0$
$|x| \to \infty$

$$-k^2 F(k) - F(k) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen} k}{k}$$

$$F(k)\left[1+k^2\right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen} k}{k} \Big/ \frac{1}{1+k^2}$$

$$F(k) = \underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen} k}{k}\right)}_{F_1(k)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1+k^2}\right)}_{F_2(k)}$$

Producto de dos transformadas

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F_1(k)\right] = H(1-|x|)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F_2(k)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+k^2}\right] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+k^2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-|x|}$$

$$y(x) = f_1(x) * f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-u) f_2(u)\, du$$

$$= \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(1-|x-u|) \cdot \cancel{\frac{\sqrt{2\pi}}{2}} e^{-|u|}\, du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H(1-|x-u|)\, e^{-|u|}\, du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} e^{-|u|}\, du$$

$$H(1-|x-u|) = \begin{cases} 1 & |x-u| < 1 \\ 0 & |x-u| > 1 \end{cases}$$