ASSIGNATURA: Mètodes Matemàtics de la Física II
DEPARTAMENT: Física Fonamental
DATA EXAMEN: 31 – gener – 2006

1. *(3 punts)* En un problema amb simetria cilíndrica ens trobem en el pla $z = 0$ amb una funció $u(\rho, \theta)$, harmònica ($\nabla^2 u = 0$) dins el domini $\{0 < \theta < \pi,\ 1 < \rho < R\}$, on ρ i θ són, respectivament, les coordenades radial i angular. Les condicions de contorn són:

$$\{u(\rho, 0) = 0, \quad u(\rho, \pi) = 0 \quad \text{per} \quad 1 < \rho < R\} \quad \text{i} \quad \{u(1, \theta) = 0, \quad u(R, \theta) = u_0 \quad \text{per} \quad 0 < \theta < \pi\}$$

1. Trobeu les equacions diferencials en les variables ρ i θ.
2. Resoleu l'equació per a la part angular considerant la condició de contorn adequada. Discutiu totes les possibilitats. Feu el canvi $\rho = \exp(s)$, i trobeu també la dependència radial.
3. Finalment, trobeu l'expressió de $u(\rho, \theta)$ determinant els coeficients de la seva expressió en forma de sèrie.

2. *(3 punts)* Si definim la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-x^2}$ com

$$\mathcal{F}\,[e^{-x^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{isx}\, dx = \bar{f}(s)$$

1. Determineu l'equació diferencial que satisfà $\bar{f}(s)$, $s \in \mathbf{R}$, diferenciant sota la integral. Determineu la solució si $\bar{f}(0) = \sqrt{\pi}$.
2. Calculeu la $\mathcal{F}\,[e^{-c|x|}]$, $c > 0$, i utilitzeu la transformada inversa (amb el factor de normalització adequat a la definició donada abans!) per demostrar que

$$\mathcal{F}\,[\frac{1}{c^2 + x^2}] = \frac{\pi}{c}\, e^{-c|s|}$$

3. Finalment, utilitzeu el teorema de convolució

$$\mathcal{F}\,[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x - t) dt] = \bar{f}(s)\, \bar{g}(s)$$

per calcular la transformada de Fourier de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-t)^2}}{c^2 + t^2} dt$$

3. *(1 punt)* En un cultiu de tres espècies de bacteris A, B, C, el nombre de cadascun d'ells per mm^3 obeeix, independentment del nombre dels altres, la distribució de probabilitat següent:

A: Binomial de paràmetres $n = 25000$, $p = 0.01$.

B: Normal amb $m = 250$, $\sigma = 25$.

C: Poisson de paràmetre $\lambda = 625$.

1. Determineu la mitjana i la desviació típica del nombre total de bacteris per mm^3
2. Quina és la llei de probabilitat que dóna el nombre de bacteris en una mostra d'un cm^3 i quin és, en aquest cas, el nombre mínim de bacteris garantit en un $99,9\%$ dels casos.

4. *(0.5 punts)* Després de 10000 tirades d'un dau hem obtingut per als valors 1,2,3,4,5,6 les següents freqüències: 1610, 1630, 1690, 1652, 1692, 1726. Fins a quin nivell de significació podem donar per vàlida la hipòtesi que el dau no està trucat?

5. *(0.5 punts)* Expresseu en termes dels cumulants i moments centrals els paràmetres d'asimetria i curtosi. Quant valen per a una llei de Poisson? Calculeu l'asimetria de la suma de dues variables aleatòries independents i comproveu l'expressió obtinguda en el cas de dues variables de Poisson.

6. *(1 punt)* Un camp tensorial 1-contravariant i 1-covariant té per matriu de components esfèriques naturals o holònomes

$$T = \begin{pmatrix} 1 & r\sin\theta & r\sin\theta \\ \dfrac{\sin\theta}{r} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Expresseu-lo com a combinació lineal de la corresponent base tensorial, passeu-lo a la base esfèrica física o ortonormal i reconstruiu la corresponent matriu en la base esfèrica física.
2. Realitzeu el mateix canvi de matrius utilitzant la fòrmula matricial de canvi de base per als tensors 1-contravariant i 1-covariant.

7. *(0.5 punts)* A l'espai de Minkowski de tensor mètric $g = dt\otimes dt - dx\otimes dx - dy\otimes dy - dz\otimes dz$ tenim el camp electromagnètic constant donat pel tensor de Faraday $F = 3(dt\otimes dx - dx\otimes dt) + 5(dx\otimes dy - dy\otimes dx)$.

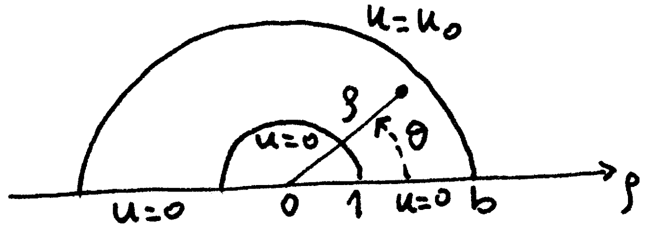
1. Construiu les matrius dels tensors $F_{\mu\nu}, F_{\mu}{}^{\nu}, F^{\mu}{}_{\nu}, F^{\mu\nu}$.
2. Construiu *mitjançant càlcul matricial* l'invariant $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$
3. Quins són els vectors elèctric i magnètic constituents del tensor de Faraday?

8. *(0.5 punts)*

1. Dedueiu la llei de transformació de les components d'un tensor 2-covariant i 1-contravariant sota un canvi de base $e \to e'$.
2. Deduiu la llei de transformació de les components holònomes d'un tensor 1-covariant i 1-contravariant sota un canvi de coordenades $x^i \to y^i$, i doneu també la seva transcripció matricial.

Sigui $u(\rho,\theta)$ una funció de les coordenades polars ρ i θ ;, harmònica en el domini $1<\rho<b$, $0<\theta<\pi$ del pla $z=0$. Trobeu l'expressió en forma de sèrie d'aquesta funció sabent que

$$u(\rho,0)=0 \quad , \quad u(\rho,\pi)=0 \qquad (1<\rho<b)$$
$$u(1,\theta)=0 \quad , \quad u(b,\theta)=u_0 \qquad (0<\theta<\pi)$$



$$\nabla^2 u=0 \longrightarrow \rho^2 u_{\rho\rho}(\rho,\theta)+\rho u_\rho(\rho,\theta)+u_{\theta\theta}(\rho,\theta)=0$$
$$(1<\rho<b,\ 0<\theta<\pi)$$

$$u=R(\rho)F(\theta)$$

(1) $\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0$, $\qquad R(1)=0$

(2) $F''(\theta)+\lambda F(\theta)=0$, $F(0)=0$, $F(\pi)=0$

λ és la constant de separació

solucionem primer el problema d'Sturm-Liouville (2)

$$\lambda=m^2 \quad F(\theta)=\sin m\theta \qquad (m=1,2,\dots)$$

per solucionar (1) fem el canvi $\boxed{\rho=e^s}$

$$\frac{d^2R}{ds^2}-m^2R=0$$

$$R=C_1e^{ms}+C_2e^{-ms}=C_1\rho^m+C_2\rho^{-m}$$

com que $R(1)=0 \longrightarrow R(\rho)\sim\rho^m-\rho^{-m}$

Per tant

$$u(\rho,\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \left(\rho^m - \rho^{-m}\right) \sin m\theta$$

per averiguar B_m fem servir les condicions de contorn

$$u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \left(b^m - b^{-m}\right) \sin m\theta \qquad (0 < \theta < \pi)$$

això és la serie de Fourier en sinus de u_0

llavors

$$B_m \left(b^m - b^{-m}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0 \sin m\theta \, d\theta = \left(\frac{2u_0}{\pi}\right) \left[\frac{1-(-1)^m}{m}\right]$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

$$u(\rho,\theta) = \frac{2u_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho^m - \rho^{-m}}{b^m - b^{-m}}\right) \left(\frac{1-(-1)^m}{m}\right) \sin m\theta$$

o també

$$u(\rho,\theta) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\rho^{2m-1} - \rho^{-(2m-1)}}{b^{2m-1} - b^{-(2m-1)}}\right] \frac{\sin (2m-1)\theta}{(2m-1)}$$

② Def $\mathcal{F}[e^{-x^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{isx}\,dx = \bar{f}(s)$

1) Ec. diferencial que satisfà $\bar{f}(s)$, $s\in\mathbb{R}$.

$$\frac{d\bar{f}(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{isx}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-x^2}e^{isx}\right]dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, ix e^{isx}\,dx =$$

per que quedi en funció de $\bar{f}(s)$ integrem per parts!!

Fem

$$u = e^{isx} \longrightarrow du = is\,e^{isx}\,dx$$

$$dv = xe^{-x^2}dx \longrightarrow v = \int dv = \int xe^{-x^2}dx =$$

$t=-x^2$

$$= -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

$$i\left[\left(\underbrace{\frac{e^{isx}e^{-x^2}}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0}\right) + \frac{is}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{isx}\,dx\right] = -\frac{s}{2}\bar{f}(s)$$

Per tant: $\frac{d\bar{f}(s)}{ds} = -\frac{s}{2}\bar{f}(s) \Rightarrow \frac{d\bar{f}(s)}{\bar{f}(s)} = -\frac{s}{2}ds \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln\bar{f}(s) = -\frac{s^2}{4} + \underbrace{\ln A}_{cte}\ ; \quad \bar{f}(s) = Ae^{-s^2/4}$$

si $\bar{f}(0)=\sqrt{\pi} \Longrightarrow \bar{f}(s) = \sqrt{\pi}\,e^{-s^2/4}$

2) $\mathcal{F}[e^{-c|x|}]$ $c>0$!! $= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c|x|}e^{isx}\,dx =$

$$= \left[\int_{-\infty}^{0} e^{+cx}e^{isx}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-cx}e^{isx}\right] =$$

$(|x|=-x)$ $\qquad (|x|=x)$

$\int e^z dz = e^z$; $z\in\mathbb{C}$

$z = \begin{cases}(c+is)x \\ (-c+is)x\end{cases}$

$dz = \begin{cases}(c+is)dx \\ (-c+is)dx\end{cases}$

$$= \underset{(*)}{\frac{1}{c+is}} + \underset{(**)}{\frac{1}{c-is}} = \frac{2c}{c^2+s^2}$$

Vegeu també 2-3 Nota 1 i 2 !!

El teorema de inversión ens diu que si $\mathcal{F}[f(x)]=\bar{f}(s)$ aleshores

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(s)\,e^{-isx}\,ds$$

[2-2]

Por lo tanto

$$e^{-c|x|}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2c}{c^2+s^2}\,e^{-isx}\,ds \Longrightarrow \qquad (c>0)$$

$$\Longrightarrow \frac{\cancel{2}\pi\, e^{-c|x|}}{\cancel{2}c}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{c^2+s^2}\,e^{-isx}\,ds \underset{\substack{\text{canvi}\\ t=-s\\ dt=-ds}}{=}$$

$$-\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{1}{c^2+t^2}\,e^{itx}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{c^2+t^2}\,e^{itx}\,dt=\mathcal{F}\left[\frac{1}{c^2+t^2}\right]$$

que es el que volíem demostrar (permutem $x\leftrightarrow s$, $t\leftrightarrow s$) !!

3) Pel teorema de convolució fem

$$f(t)=\frac{1}{c^2+t^2}\ ,\ g(t)=e^{-t^2}$$

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{c^2+t^2}\,e^{-(x-t)^2}\,dt\right\}=\bar{f}(s)\,\bar{g}(s)=$$

$$=\frac{\pi}{c}\,e^{-c|s|}\sqrt{\pi}\,e^{-s^2/4}=\frac{\pi^{3/2}}{c}\,e^{-c|s|-s^2/4}$$

Nota 1:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{cx} e^{isx}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{cx} [\cos sx + i \operatorname{sen} sx)\, dx =$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-cx} e^{isx} dx = \int_{0}^{\infty} e^{-cx} [\cos sx + i \operatorname{sen} sx)\, dx$$

$\to -t = x; \quad -dt = dx$

$$\int_{+\infty}^{0} e^{-ct} [\cos(-st) + i \operatorname{sen}(-st)](-dt) =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-ct} [\cos(st) - i \operatorname{sen}(st)]\, dt$$

Entonces

$$\mathcal{F}[e^{-c|x|}] = \int_{-\infty}^{0} e^{cx} e^{isx} dx + \int_0^{\infty} e^{-cx} e^{isx} dx =$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} e^{-cx} \cos sx\, dx = 2 \cdot \frac{c}{c^2+s^2} \qquad \text{c.q.d.}$$

$$(*) \int_{-\infty}^{0} e^{(c+is)x} dx = \int_{\text{“}-\infty\text{”}}^{0} e^{z} \frac{1}{c+is} dz = \frac{1}{c+is} [e^0 - e^{\text{“}-\infty\text{”}}] = \frac{1}{c+is}$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{cx} e^{isx} = 0$$

$$(**) \int_{0}^{\infty} e^{-cx} e^{isx} dx = \int_{0}^{\text{“}\infty\text{”}} e^{z} \frac{-1}{-c+is} dz = \frac{1}{-c+is} [e^{\text{“}\infty\text{”}} - e^{0}] = \frac{1}{c-is}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-cx} e^{isx} = 0$$

Nota 2:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c|x|} e^{isx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-c|x|}}_{\text{func. par}} (\overbrace{\cos sx}^{\text{función par}} + \underbrace{i \operatorname{sen} sx}_{\text{función impar}})\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c|x|} \cos sx\, dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-cx} \cos sx\, dx = \frac{2c}{c^2+s^2}$$

3. X = # bacteris/mm^3 $X = A + B + C$ A, B, C independents

A: binomial $n = 25.000$ $p = 0,01$ n gran, p petit $np = 250$ $\approx$ Poisson $\lambda_A = 250$

Suma de Poisson's és Poisson $A + C \approx$ Poisson $\lambda = \lambda_A + \lambda_C = 250 + 625 = 875$

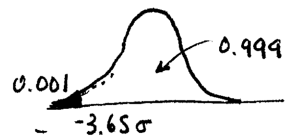
$k_1(X) = m_1(X) = 875 + 250 = 1125$ (Poisson + Normal)

$k_2(X) = 875 + 25^2 = 875 + 625 = 1500$ $\sigma = 38.73 \simeq 39$

Com Poisson amb λ elevat és aproximadament normal, podem considerar que X és normal amb $m = 1125$ i $\sigma^2 = 1500$ $(\sigma = 39 \simeq 40)$

En 1 $cm^3 = 1000\ mm^3$ sumem mil variables del tipus anterior $m(y) = 1125000$ bact/cm^3

$k_2(y) = \sigma^2(y) = 1500000$ $\sigma(y) \approx 1225 \approx 1200$ bact/cm^3



per $(3,65) \simeq 0.999$

$3,65\ \sigma_y = 4470 \simeq 4500$

Amb una probabilitat del 99,9% el nombre de bacteris per cm^3 superarà

$1125000 - 4500 = 1120500$ bacteris

4. $$\chi^2 = \frac{1}{n} \sum \frac{f_i^2}{p_i} - n = \frac{6}{10.000}\left(1610^2 + 1630^2 + 1690^2 + 1652^2 + 1726^2 + 1692^2\right) - 10.000$$

$$= \frac{6 \times 16676144}{10.000} - 10.000 = 5.686$$

Correspon a una χ^2 de 5 graus de llibertat

$\chi^2_{0.75} = 6.63$ → Puc donar la hipòtesi per vàlida a un nivell de significació del 25%

$\chi^2_{0.50} = 4.35$ (→ no la puc donar per vàlida a un nivell de signo. del 50%)

5. $$\gamma_a = \frac{k_3}{(k_2)^{3/2}} = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} \equiv \frac{\mu_3}{\sigma^3} \qquad \gamma_c = \frac{k_4}{k_2^2} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

Per a Poisson tots els cumulants són iguals a λ $\Rightarrow$ $\gamma_a = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ $\gamma_c = \frac{1}{\lambda}$

$$\gamma_a(X+Y) = \frac{k_3(X) + k_3(Y)}{(k_2(X) + k_2(Y))^{3/2}}$$

$Z = X + Y$ $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ per a tots els cumulants $\gamma_a(Z) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ∎

6.

$$T = (t^i{}_j) = \begin{pmatrix} 1 & r\sin\theta & r\sin\theta \\ \frac{\sin\theta}{r} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

base contravariant natural o holònoma $\{\partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi\}$
covariant " " $\{dr, d\theta, d\varphi\}$

$$T = 1\, \partial_r \otimes dr + r\sin\theta\, \partial_r \otimes d\theta + r\sin\theta\, \partial_r \otimes d\varphi + \frac{\sin\theta}{r}\, \partial_\theta \otimes dr - \frac{1}{\sin\theta}\, \partial_\varphi \otimes d\theta$$

Tenint present que $|\partial_r| = 1 \quad |\partial_\theta| = r \quad |\partial_\varphi| = r\sin\theta \qquad |dr| = 1 \quad |d\theta| = \frac{1}{r} \quad |d\varphi| = \frac{1}{r\sin\theta}$

$$T = 1\, e_r \otimes e^r + \frac{\cancel{r}\sin\theta}{\cancel{r}}\, e_r \otimes e^\theta + \frac{\cancel{r\sin\theta}}{\cancel{r\sin\theta}}\, e_r \otimes e^\varphi + \frac{\sin\theta\, \cancel{r}}{\cancel{r}}\, e_\theta \otimes e^r - \frac{1}{\cancel{\sin\theta}} \frac{\cancel{r}\,\cancel{\sin\theta}}{\cancel{r}}\, e_\varphi \otimes e^\theta$$

$$= e_r \otimes e^r + \sin\theta\, e_r \otimes e^\theta + e_r \otimes e^\varphi + \sin\theta\, e_\theta \otimes e^r - e_\varphi \otimes e^\theta$$

que correspon a una matriu de components físiques $(\hat{t}^{i'}{}_{j'}) = \begin{pmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

La fórmula del canvi de base corresponent a aquest tensor és

$$t^{i'}{}_{j'} = a^{i'}{}_i\, a_{j'}{}^j\, t^i{}_j = a^{i'}{}_i\, t^i{}_j\, a_{j'}{}^j$$

← correspon a la matriu transposada, però com el canvi holònoma ⇔ física és diagonal, val igual **

$$\underset{*}{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & r & \\ & & r\sin\theta \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & r\sin\theta & r\sin\theta \\ \frac{\sin\theta}{r} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sin\theta} & 0 \end{pmatrix} \underset{**}{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/r & \\ & & 1/(r\sin\theta) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r & \\ & & r\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ \frac{\sin\theta}{r} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

*, ** matrius que expressen la base holònoma en funció de la base física
* contravariant
** covariant (per files = per columnes)

7.

$$F = 3(dt \otimes dx - dx \otimes dt) + 5(dx \otimes dy - dy \otimes dx) \rightsquigarrow (F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La mètrica és la $(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu})$

La matriu és la pròpia inversa

$F_\mu{}^\nu = F_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu}$ (equival a multiplicar per -1 les 3 darreres columnes) $(F_\mu{}^\nu) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$F^\mu{}_\nu = g^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu}$ (id les 3 darreres files) $(F^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{E} = (3, 0, 0)$, $\vec{B} = (0, 0, -5)$

vector elèctric i magnètic

$F^{\mu\nu} = g^{\mu\sigma} F_{\sigma\tau} g^{\tau\nu} \quad \cdots\to \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \text{Traça}\text{"}\left(-(F^{\mu\nu})(F_{\mu\nu})\right)\text{"} = \text{Traça}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

↳ producte matricial amb la transposta que com és antisimètrica és la matriu canviada de signe. Només cal calcular la diagonal

$$= \text{Traça} \begin{pmatrix} -9 & & & \\ & -9+25 & & \\ & & 25 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = 50 - 18 = 32 = \text{"}2(B^2 - E^2)\text{"}$$

$$F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E_i \\ E_i & \epsilon_{ijk} B_k \end{pmatrix}$$

per a les dues mètriques de Minkowski

ASSIGNATURA: Mètodes Matemàtics de la Física II
DEPARTAMENT: Física Fonamental
DATA EXAMEN: 14 – juny – 2005

1. *(1 punt)* Calculeu la mitjana, desviació típica, asimetria i curtosi per

   a) El valor obtingut per a la tirada d'un dau tetraèdric equiprobable $\{1, 2, 3, 4\}$.

   b) El valor obtingut en sumar els resultats de dues tirades.

2. *(0,5 punt)* Determineu, a un nivell de confiança del 95% el consum màxim anual d'aigua (en m^3) d'una factoria que en cadascun dels 250 dies laborals resulta de sumar una Poisson de paràmetre 50 i una normal de mitjana 50 i variança 25, mentre que en cadascun dels 115 dies festius el consum correspon a una binomial n=20, p=0,5.

3. *(0,5 punt)* En començar l'any el forner i la fornera d'un poble formulen les següents hipòtesis sobre com es distribuirà la venda de les 1000 barres de pa que couran cada dia. (H1, forner, binomial amb n= 1000), (H2, fornera, binomial amb n=1000, p=0,95). En acabar l'any troben que la mitjana de vendes ha estat exactament de 950 barres al dia, agrupen les dades dels 360 dies treballats en 16 regions i calculen la discrepància chi-quadrat de les dades amb la binomial n=1000, p=0,95. El resultat és de 24,4. Han estat validades o refusades les seves hipòtesis al nivell de significació del 5%?

1. Mesura de probabilitat del dau $\quad \frac{1}{4}(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4)$

moments ordinaris $\qquad$ Cumulants

$m_1 = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \qquad k_1 = m_1 = 5/2$

$m_2 = \frac{1}{4}(1+4+9+16) = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} \qquad k_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{30}{4} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4} \qquad \sigma = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$m_3 = \frac{1}{4}(1+8+27+64) = \frac{100}{4} = 25 \qquad k_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 = \dots = 0 \qquad \gamma_a = 0$

$m_4 = \frac{1}{4}(1+16+81+256) = \frac{354}{4} = \frac{177}{2} \qquad k_4 = m_4 - 4m_3 m_1 - 3m_2^2 + 12 m_2 m_1^2 - 6m_1^4 = \dots = -\frac{17}{8} = -2.125$

$$\gamma_e = \frac{k_4}{k_2^2} = \frac{-17/8}{25/16} = -\frac{34}{25} = -1.36$$

Per a la suma de dues tirades els cumulants valen el doble i tenim

$m(2) = 5$

$k_2(2) = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \sigma(2) = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$k_3(2) = 0 \qquad \gamma_a(2) = 0$

$k_4(2) = -17/4 \qquad \gamma_e(2) = -\frac{17}{4}\cdot\frac{16}{100} = -0.68$

2. $k_1 = 250\,(50+50) + 115\cdot(20\cdot\frac{1}{2}) = 25000 + 1150 = 26150 \text{ m}^3$

$k_2 = 250\,(50+25) + 115\cdot(20\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}) = 18750 + 575 = 19325 \qquad \sigma = 139.0 \text{ m}^3$

fer(1.645) = 0.95 (Taula) $\qquad X_{0.95} = 1.645 \times 139 + 26150 = 26378.7 \text{ m}^3 \sim 26379 \text{ m}^3$

3. # graus llibertat = nº regions − 1 − # paràmetres estimats a partir de la mostra

per H_1 (forner) $\quad 16-1-1 = 14 \qquad \chi^2_{0.95}(14) = 23.7 < 24.4 \qquad$ Refús H_1

H_2 (fornera) $\quad 16-1 = 15 \qquad \chi^2_{0.95}(15) = 25 > 24.4 \qquad$ {Acceptació / validació} H_2

4. *(1 punt)* Considereu la transformació entre dos sistemes de referència inercials donada per la transformació de Lorentz en unitats naturals ($c = 1$)

$$t' = \cosh(r)\,t - \sinh(r)\,z, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \cosh(r)\,z - \sinh(r)\,t$$

a) Quina és l'expressió en el sistema de coordenades $\{t, x, y, z\}$ del camp electromagnètic

$$F = 2\,(dt' \otimes dz' - dz' \otimes dt') + 3\,(dx' \otimes dz' - dz' \otimes dx').$$

b) Quina interpretació física es desprèn del resultat anterior?

5. *(0,5 punt)* Efectua les contraccions

$$A^{j}_{\cdot\, l} = S^{ij}_{\cdot\cdot\, il} \qquad B^{j}_{\cdot\, k} = S^{ij}_{\cdot\cdot\, ki} \qquad C = S^{ij}_{\cdot\cdot\, ij} \qquad D = S^{ij}_{\cdot\cdot\, ji}$$

sobre el tensor de quart ordre $S^{ij}_{\cdot\cdot\, kl}$ sobre un espai vectorial de dimensió 2 que té per components la matriu de matrius següent

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

on els dos primers índexs contravariants especifiquen la submatriu i els dos darrers, covariants, indiquen l'element de la submatriu.

6. *(0,5 punt)* Sobre l'hemisferi nord d'una esfera de radi a prenem com a coordenades $\{\rho = a\sin\theta,\, \varphi\}$. Utilitzant l'expressió matricial del canvi de components d'un tensor 2-covariant, determineu l'expressió de la mètrica $a^2\,(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta\, d\varphi \otimes d\varphi)$ en les coordenades $\{\rho, \varphi\}$

(5) Convé reescriure les dades en la forma

$$(S^{ij}_{kl}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 = S^{11}_{11} & 2 = S^{11}_{12} \\ 3 = S^{11}_{21} & 4 = S^{11}_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 = S^{12}_{11} & 6 = S^{12}_{12} \\ 7 = S^{12}_{21} & 8 = S^{12}_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 9 = S^{21}_{11} & 10 = S^{21}_{12} \\ 11 = S^{21}_{21} & 12 = S^{21}_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 13 = S^{22}_{11} & 14 = S^{22}_{12} \\ 15 = S^{22}_{21} & 16 = S^{22}_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Resultats

$$(A^j_l) = \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 20 & 22 \end{pmatrix}$$

$$(B^j_l) = \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 19 & 23 \end{pmatrix}$$

$C = D = 34.$

$A^j_l = S^{ij}_{il}$

$$A^1_1 = S^{11}_{11} + S^{21}_{21} = 1 + 11 = 12 \qquad A^1_2 = S^{11}_{12} + S^{21}_{22} = 2 + 12 = 14$$

$$A^2_1 = S^{12}_{11} + S^{22}_{21} = 5 + 15 = 20 \qquad A^2_2 = S^{12}_{12} + S^{22}_{22} = 6 + 16 = 22$$

$B^j_k = S^{ij}_{ki}$

$$B^1_1 = S^{11}_{11} + S^{21}_{12} = 1 + 10 = 11 \qquad B^1_2 = S^{11}_{21} + S^{21}_{22} = 3 + 12 = 15$$

$$B^2_1 = S^{12}_{11} + S^{22}_{12} = 5 + 14 = 19 \qquad B^2_2 = S^{12}_{21} + S^{22}_{22} = 7 + 16 = 23$$

$$C = S^{ij}_{ij} = S^{11}_{11} + S^{12}_{12} + S^{21}_{21} + S^{22}_{22} = 1 + 6 + 11 + 16 = 34$$

$$D = S^{ij}_{ji} = S^{11}_{11} + S^{12}_{21} + S^{21}_{12} + S^{22}_{22} = 1 + 7 + 10 + 16 = 34$$

(6) $$g_{i'j'}(x') = g_{ij}(x)\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \implies g(x') = \left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)^T g(x)\,\frac{\partial(x)}{\partial(x')}$$

$x = \{\theta, \varphi\}$
$x' = \{\rho, \varphi\}$

$$\frac{\partial(x)}{\partial(x')} \equiv \frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\theta}{\partial\rho} & \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} & \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{\frac{d\rho}{d\theta}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a\cos\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$ diagonal, simètrica

$$g(\rho,\varphi)=\begin{pmatrix}\frac{1}{a\cos\theta} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & a^2\sin^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{a\cos\theta} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos^2\theta} & \\ & a^2\sin^2\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a^2}{a^2-\rho^2} & \\ & \rho^2\end{pmatrix}$$

$\sin\theta=\rho/a \qquad \cos^2\theta=1-\rho^2/a^2=\dfrac{a^2-\rho^2}{a^2}$

és la forma matricial de la mètrica en les coordenades $\{\rho,\varphi\}$

en forma desenvolupada $\quad g(\rho,\varphi)=\dfrac{a^2}{a^2-\rho^2}\,d\rho\otimes d\rho+\rho^2\,d\varphi\otimes d\varphi$

(4) El problema es pot fer sense càlcul matricial o utilitzant la fórmula matricial pel canvi de tensor 2-covariant, com en el problema 6.

a) directament

$$\begin{aligned} t'&=\mathrm{ch}\,r\; t-\mathrm{sh}\,r\; z & dt'&=\mathrm{ch}\,r\,dt-\mathrm{sh}\,r\,dz\\ x'&=x \quad y'=y & dx'&=dx \quad dy'=dy\\ z'&=\mathrm{ch}\,r\; z-\mathrm{sh}\,r\; t & dz'&=\mathrm{ch}\,r\,dz-\mathrm{sh}\,r\,dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dt'\otimes dz'-dz'\otimes dt' &= \mathrm{ch}^2r\,dt\otimes dz-\cancel{\mathrm{ch}r\,\mathrm{sh}r\,dt\otimes dt}-\cancel{\mathrm{sh}r\,\mathrm{ch}r\,dz\otimes dz}+\mathrm{sh}^2r\,dz\otimes dt\\ &\quad-\mathrm{ch}^2r\,dz\otimes dt+\cancel{\mathrm{ch}r\,\mathrm{sh}r\,dz\otimes dz}+\cancel{\mathrm{sh}r\,\mathrm{ch}r\,dt\otimes dt}-\mathrm{sh}^2r\,dt\otimes dz\\ &=(\mathrm{ch}^2r-\mathrm{sh}^2r)(dt\otimes dz-dz\otimes dt)=dt\otimes dz-dz\otimes dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx'\otimes dz'-dz'\otimes dx' &= \mathrm{ch}\,r\,dx\otimes dz-\mathrm{sh}\,r\,dx\otimes dt-\mathrm{ch}\,r\,dz\otimes dx+\mathrm{sh}\,r\,dt\otimes dx\\ &=\mathrm{sh}\,r\,(dt\otimes dx-dx\otimes dt)+\mathrm{ch}\,r\,(dx\otimes dz-dz\otimes dx)\end{aligned}$$

$$F=2(dt\otimes dz-dz\otimes dt)+3\,\mathrm{sh}\,r\,(dt\otimes dx-dx\otimes dt)+3\,\mathrm{ch}\,r\,(dx\otimes dz-dz\otimes dx)$$

matricialment, en l'ordenació t,x,y,z tenim

$$F'_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&0&2\\0&0&0&3\\0&0&0&0\\-2&-3&0&0\end{pmatrix}\qquad F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&3\,\mathrm{sh}r&0&2\\-3\,\mathrm{sh}r&0&0&3\,\mathrm{ch}r\\0&0&0&0\\-2&-3\,\mathrm{ch}r&0&0\end{pmatrix}$$

Interpretació: El camp elèctric d'intensitat 2 en la direcció z que coincideix amb la del moviment relatiu de sistema, queda invariant (no es transforma)
El camp magnètic d'intensitat 3 en la direcció y (perpendicular al pla z,x) perpendicular a la direcció del moviment, creix en un factor $\cosh(r)$ i a més fa aparèixer un camp elèctric $3\sinh(r)$ en la direcció x que és perpendicular alhora a la direcció del moviment relatiu i al camp magnètic original
També constatem que el caràcter antisimètric del tensor 2-covariant es manté sota canvi de coordenades (que en aquest cas expressa un canvi en el sistema de referència o "laboratori"

b) Alternativament, com a tensor 2-covariant $\quad F_{\mu\nu}(x)=F'_{\alpha'\beta'}(x')\dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}\dfrac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu}$ $\quad$ de nou la jacobiana és simètrica.

$$F'=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}r&0&0&-\mathrm{sh}r\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\mathrm{sh}r&0&0&\mathrm{ch}r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&2\\0&0&0&3\\0&0&0&0\\-2&-3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{ch}r&0&0&-\mathrm{sh}r\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\mathrm{sh}r&0&0&\mathrm{ch}r\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}r&0&0&-\mathrm{sh}r\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\mathrm{sh}r&0&0&\mathrm{ch}r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\,\mathrm{sh}r&0&0&2\,\mathrm{ch}r\\-3\,\mathrm{sh}r&0&0&3\,\mathrm{ch}r\\0&0&0&0\\-2\,\mathrm{ch}r&-3&0&2\,\mathrm{ch}r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\,\mathrm{sh}r&0&2(\mathrm{ch}^2r-\mathrm{sh}^2r)=2\\-3\,\mathrm{sh}r&0&0&3\,\mathrm{ch}r\\0&0&0&0\\-2(\mathrm{ch}^2r-\mathrm{sh}^2r)=-2,&-3\,\mathrm{ch}r,&0&0\end{pmatrix}$$

7. *(3 punts)* Resoleu l'equació diferencial següent:

$$y''(t) - 4y(t) = \int_0^t J_0(u)J_0(t-u)du$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

8. *(3 punts)* Si $u(x,t)$ representa la temperatura al llarg d'una barra aïllada no homogènia en $-1 \le x \le 1$ amb una conductivitat tèrmica proporcional a $(1-x^2)$, llavors $u(x,t)$ satisfà l'equació

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

Els extrems es troben aïllats. Obteniu la distribució de temperatures amb la condició inicial $u(x,0) = f(x)$. Feu servir criteris físics per a seleccionar els possibles valors de la constant de separació. Trobeu la solució explícita en el cas particular en què $f(x) = x^2$.

---

7)

$$Y(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[y''] - 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}\left[\int_0^t J_0(u)J_0(t-u)\,du\right]$$

T. convolución

$$\{s^2Y(s) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)}\} - 4\{Y(s)\} = \mathcal{L}[J_0(t)]\,\mathcal{L}[J_0(t)] = \left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right)^2 = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s^2-4)Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\ ;\quad Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)}\cdot\frac{1}{(s^2-4)}$$

estan en la taula!!

$$\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2-4} = \frac{A}{s^2+1} + \frac{B}{s^2-4} = \frac{A(s^2-4)+B(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2-4)}$$

Numerador $\quad (A+B)s^2 - 4A + B = 1 \Rightarrow A+B=0\ ;\ \boxed{A=-B}$

$$-4A - A = -5A = 1 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{5}}$$

$$B = \frac{1}{5}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = A\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] + B\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4}\right] =$$

$$= A\,\text{sen}\,t + B\,\frac{\text{senh}\,2t}{2} = -\frac{1}{5}\text{sen}\,t + \frac{1}{10}\text{senh}\,2t =$$

obien

$$= -\frac{1}{5}\text{sen}\,t + \frac{1}{10}\left[\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\right] = -\frac{1}{5}\text{sen}\,t + \frac{1}{20}\left(e^{2t}-e^{-2t}\right)$$

$-1 \le x \le 1$; conductividad $\propto$ a $1-x^2$ la Temperatura obedece la ec.

(8)
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

Como la conduct en ext es <u>nula</u>, los extremos están aislados!!

Cond. inicial
$u(x,0) = f(x)$

$u = T(t)\,X(x)$

$$X\frac{dT}{dt} = k\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)T(t)\frac{dX}{dx}\right] =$$

$$= kT(t)\left[-2x\frac{dX}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2X}{dx^2}\right]$$

$$\underbrace{\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}}_{\lambda} = \underbrace{\frac{k}{X}\left[-2x\frac{dX}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2X}{dx^2}\right]}_{\lambda}$$

$$\frac{dT}{dt} = \lambda T \longrightarrow \quad \frac{dT}{dt} = -n(n+1)k\,dt \,; \boxed{T(t) = C e^{-n(n+1)kt}}$$

$$-2x\frac{dX}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{\lambda}{k}X \Longrightarrow \boxed{(1-x^2)X'' - 2xX' - \frac{\lambda}{k}X = 0}$$

Para que $X(x)$ finita en $x=-1$, $x=1$

$$-\frac{\lambda}{k} = n(n+1) \quad \text{Sol } \underline{P_n(x)} \qquad n=0,1,2,3\ldots$$

$$\lambda = -n(n+1)k$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n(n+1)kt} P_n(x)$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) \,;$$

$$\langle P_n(x)|f(x)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n'} \overbrace{\langle P_n(x)|P_{n'}(x)\rangle}^{\frac{2}{2n+1}\delta_{nn'}} =$$

$$= A_n \frac{2}{2n+1}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2}\right) e^{-n(n+1)kt} P_n(x)\left[\int_{-1}^{+1} f(z)P_n(z)\,dz\right]$$

Caso especial $f(x) = x^2$

Només contribueix $n=0, n=2$

$$\int_{-1}^{+1} z^2 P_n(z)\,dz = \ldots \Longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{3} + \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)e^{-6kt}$$

$$x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$$

ASSIGNATURA: Mètodes Matemàtics de la Física II
DEPARTAMENT: Física Fonamental
DATA EXAMEN: 18 – gener – 2005

1. *(3.5 punts)* Considereu el problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2}{dx^2}\, y(x) = -\lambda^2\, y(x) \ , \quad y(0) = y(2L) = 0$$

on $-\lambda^2$ és l'autovalor i L és una constant positiva.

1. Trobeu els els corresponents autovalors i autofuncions *ortonormatlizades*, $X_n(x)$.
2. Prengueu la funció
$$f(x) = \sinh\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$
i trobeu el seu desenvolupament en sèrie ortogonal de les funcions anteriors, és dir, trobeu els coeficients A_n de la sèrie
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, X_n(x)$$
3. Utilitzant el teorema de Parseval, proveu que
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + 1/n)^{-2} = \frac{\pi}{8}\, \frac{\sinh 2\pi - 2\pi}{\sinh^2 \pi} \simeq 0.769837\ldots$$

2. *(2.5 punts)* Donada l'equació diferencial

$$\left(\frac{d^4}{dt^4} - \beta^4\right) y(t) = 0$$

amb condicions inicials $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$, $\dddot{y}\ (0) = a_0$, on β és una constant real i positiva i a_0 una constant real, es demana:

1. Efectuar la transformada de Laplace de l'equació diferencial i aïllar la incògnita, $\hat{y}(s)$.
2. Invertir la transformada per trobar $y(t)$.
3. Demostrar que, a temps llargs comparats amb $1/\beta$, i.e., $t \gg 1/\beta$, $y(t)$ creix exponencialment amb el temps.

3. *(1.5 punts)* Un comptador enregistra cada segon els resultats provinents d'una distribució binomial de paràmetres $n = 10, p = 0.2$, superposats als que provenen d'una distribució de Poisson de paràmetre $\lambda = 3$.

– Determineu la mitjana, desviació típica i asimetria dels comptes enregistrats en un segon.
– Determineu la mitjana i la desviació típica dels comptes acumulats en un període d'una hora, així com el corresponent interval de confiança simètric del 90%.
– *nota auxiliar* L'asimetria d'una distribució binomial és $\gamma_a = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$.

4. *(0.5 punts)* Contesta tan sols una de les següents qüestions:

– **4A** Defineix el nivell de significació del test d'hipòtesi chi-quadrat. Es vol comprovar a un nivell de significació del 5% la hipòtesi segons la qual una distribució de dades segueix una llei de Poisson. Agrupades les dades en 20 regions i estimada la mitjana a partir de les pròpies dades, quin és el valor màxim del test que valida la hipòtesi?

- **4B** En una distribució Bose-Einstein de 20 partícules indistingibles en 7 cel·les, quina és la probabilitat que dues cel·les quedin buides? (nota per a autocomprovació: la probabilitat és un dels quatre valors 0.32335, 0.29756, 0.35354, 0.36211).

5. *(1.5 punts)* A l'espai de Minkowski bidimensional de tensor mètric $g = dt \otimes dt - dx \otimes dx$ associat a la base lorentziana natural $\{\partial_t, \partial_x\}$, prenem com a nova base els camps vectorials $\{v_1 = \partial_t, v_2 = \partial_t + 2\partial_x\}$.

- Expresseu en termes de les bases lorentzianes originals les bases dual $\{\omega^1, \omega^2\}$ i recíproca $\{w_1, w_2\}$.
- Expreseu el vector 'posició' $A = t\partial_t + x\partial_x$ en les bases v_i i w_i.
- Expresseu la mètrica en la base ω^i i empreu-la per a determinar la norma del vector A i per a construir la 1-forma o vector covariant associat al vector A.

6. *(0.5 punts)* Fent servir la fòrmula matricial per a la transformació de les components d'un tensor 2-contravariant sota un canvi de coordenades, determineu l'expressió cartesiana del tensor 2-contravariant antisimètric que en polars planes té l'expressió: $\sin\theta(\partial_r \otimes \partial_\theta - \partial_\theta \otimes \partial_r)$.

Solución problema 1

1.) $$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0 \quad , \quad y(0) = y(2L) = 0 \qquad (1)$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$y(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \qquad (2)$$

y cumplen

$$\begin{cases} y(0) = A = 0 & (3.a) \\ y(2L) = A \cos 2\lambda L + B \sin 2\lambda L = 0 & (3.b) \end{cases}$$

de donde se deduce la condición de autovalor

$$A = 0 , \quad B \neq 0 , \quad \boxed{\sin 2\lambda L = 0} \qquad (4)$$

que implica

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_n = \dfrac{n\pi}{2L} , \quad n = 1, 2, 3, \dots & (5.a) \\ y(x) = X_n(x) = B_n \sin \dfrac{n\pi x}{2L} & (5.b) \end{cases}$$

Las constantes B_n se obtienen por normalización:

$$\int_0^{2L} |X_n(x)|^2 \, dx = 1 \qquad (6)$$

es decir

$$B_n^2 \int_0^{2L} \sin^2 \frac{n\pi x}{2L} \, dx = B_n^2 L = 1 \qquad (7)$$

de donde $B_n = L^{-1/2} \quad \forall L$, o sea

$$\boxed{X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\frac{n\pi x}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{8}$$

2.) Dada la completitud del conjunto $\{X_n\}$, podemos escribir

$$f(x) = \sinh\frac{\pi x}{2L} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) \tag{9}$$

donde

$$A_n = \int_0^{2L} X_n^*(x)\, f(x)\, dx \tag{10}$$

Substituyendo,

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^{2L} \sin\frac{n\pi x}{2L} \sinh\frac{\pi x}{2L}\, dx \tag{11}$$

Esta integral se calcula recordando la definición

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \tag{12}$$

donde z es un número complejo cualquiera. el resultado es (consultar tablas):

$$\boxed{A_n = 2\sqrt{L}\, \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{n + 1/n}} \tag{13}$$

3.) El teorema de Parseval establece que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 = \int_0^{2L} |f(x)|^2\, dx \tag{14}$$

Usando de nuevo las tablas,

$$\int_0^{2L} |f(x)|^2 \, dx = \int_0^{2L} \sinh^2 \frac{\pi x}{2L} \, dx = \frac{L}{2\pi} \left(\sinh 2\pi - 2\pi \right) \tag{15}$$

Substituyendo (13) y (15) en (14) se obtiene el resultado final

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + 1/n)^{-2} = \frac{\pi}{8} \frac{\sinh 2\pi - 2\pi}{\sinh^2 \pi} \simeq 0.769837\ldots \tag{16}$$

Solución Problema 2

$$\left(\frac{d^4}{dt^4} - \beta^4\right) y(t) = 0, \tag{1.a}$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0 \quad , \quad \dddot{y}(0) = a_0 \tag{1.b}$$

1.) Designamos

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st}\, dt \tag{2}$$

Usando un teorema,

$$\widehat{\ddddot{y}}(s) = s^4 \hat{y}(s) - s^3 y(0) - s^2 \dot{y}(0) - s\, \ddot{y}(0) - \dddot{y}(0) \tag{3}$$

de modo que la ecuación diferencial, transformada por Laplace, resulta ser

$$(s^4 - \beta^4)\, \hat{y}(s) = a_0 \tag{4}$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{\hat{y}(s) = \frac{a_0}{s^4 - \beta^4}} \tag{5}$$

2.) Para hallar la transformada inversa notemos que

$$\frac{1}{s^4-\beta^4} = \frac{1}{(s^2+\beta^2)(s^2-\beta^2)} = \frac{1}{2\beta^2}\left(\frac{1}{s^2-\beta^2} - \frac{1}{s^2+\beta^2}\right) \tag{6}$$

o bien,

$$\frac{1}{s^4-\beta^2} = \frac{1}{2\beta^3}\,\frac{\beta}{s^2-\beta^2} - \frac{1}{2\beta^3}\,\frac{\beta}{s^2+\beta^2} \tag{7}$$

De acuerdo con las tablas de transformadas de Laplace,

$$\sin \beta t \longrightarrow \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \qquad (8.a)$$

$$\sinh \beta t \longrightarrow \frac{\beta}{s^2-\beta^2} \qquad (8.b)$$

Por lo tanto, combinando ésto con (5) y (7),

$$\boxed{y(t) = \frac{a_0}{2\beta^3}\left(\sinh \beta t - \sin \beta t\right)} \qquad (9)$$

3.) Usando la definición

$$\sinh \beta t = \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \qquad (10)$$

y recordando que $\sin \beta t$ permanece ~~a~~ acotado $\forall t$, la fórmula (10) indica que

$$\sinh \beta t \simeq \frac{1}{2} e^{\beta t} \quad \text{si} \quad \beta t \gg 1 \qquad (11)$$

y, en consecuencia,

$$\boxed{y(t) \simeq \frac{a_0}{4\beta^3} e^{\beta t} \quad \text{cuando} \quad \beta t \gg 1}$$

que crece exponencialmente (o decrece, si $a_0 < 0$) porque $\beta > 0$ por hipótesis.

3) Els comptes enregistrats per segon resulten de la suma de dues variables aleatòries, suposadament independents (ja que no es detalla cap mena de relació). Per tant cal aplicar l'addició dels corresponents cumulants. Per a la binomial els tres primers cumulants són

$k_1 = np = m$ $\quad k_2 = npq = \sigma^2$ $\qquad k_3 = \gamma_a \sigma^3 = \dfrac{1-2p}{\sqrt{npq}} (npq)^{3/2} = (1-2p)\, npq$

cal conèixer-los i és immediat calcular-los

donat a l'enunciat per si no el recordeu. Resulta una mica llarg de calcular.

Per a la distribució de Poisson tots els cumulants són iguals al paràmetre λ. Així tenim:

cumulant	binomial	Poisson	Compte per segon		Comptes en 1 hora
$k_1 = m$	2	3	5	$\times 3600 =$	18 000
$k_2 = \sigma^2$	1.6	3	4.6	$\times 3600 =$	16 560
k_3	0.96	3	3.96		

- comptes per segon: $m = 5$ $\quad \sigma = \sqrt{4.6} \simeq 2.145$ $\quad \gamma_a = \dfrac{3.96}{(4.6)^{3/2}} \simeq 0.40$
- comptes per hora: $m = 18\,000$ $\quad \sigma = \sqrt{16\,560} \simeq 128.7$
- L'interval simètric del 90% requereix excloure un 5% de les dades a cada extrem. En l'aproximació normal, plenament justificada pel Teorema del Límit Central en el cas dels comptes acumulats en una hora tenim: $fer^{-1}(0.95) = 1.645$ (Taules). Destipificant aquest valor obtenim

$1.645 \times \sigma = 211.69$ i, per tant l'interval de confiança demanat és:

$18\,000 \pm 212$ o bé $(17\,788,\ 18\,212)$

4a) Es defineix el nivell de significació d'un test (el chi-quadrat, per exemple) com la probabilitat de refusar la hipòtesi en base a les mostres que resulten de (satisfan) la hipòtesi. En el cas proposat el nombre de graus de llibertat és nombre d'agrupaments $-1-$ nombre de paràmetres estimats $= 20-1-1 = 18$. Per $n = 18$ $\quad \chi^2_{0.95} = 28.9$ és el valor màxim admissible del test (taules) (de la discrepància) per a acceptar la hipòtesi.

4b) $$p = \frac{\binom{7}{2}\binom{19}{4}}{\binom{26}{6}} = \frac{21 \cdot 3876}{230230} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19}{5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23} \simeq 0.35354 \qquad P_{Bose} = \binom{\text{partícules} + \text{cel·les} - 1}{\text{cel·les} - 1}$$

$\binom{7}{2}$ correspon a les tries possibles de les dues cel·les buides. Les altres cinc no poden quedar buides $\Rightarrow$ 5 de les 20 partícules es "gasten" en satisfer aquesta condició i les diferents possibilitats corresponen a distribuir 15 partícules en cinc cel·les, és a dir $\binom{15+4}{4} = \binom{19}{4}$ possibilitats

5) La matriu $A=(a^i{}_{j'})$ del canvi de base prenent com $\{e_i\}$ la base natural $\{\partial_t, \partial_x\}$ i com $\{e'_i\}$ la nova base $\{v_1, v_2\}$ és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Els canvis corresponents són:

$$v_1 = \partial_t \qquad \partial_t = v_1 \qquad \omega^1 = dt - \tfrac{1}{2}dx \qquad dt = \omega^1 + \omega^2$$
$$v_2 = \partial_t + 2\partial_x \qquad \partial_x = -\tfrac{1}{2}v_1 + \tfrac{1}{2}v_2 \qquad \underbrace{\omega^2 = \tfrac{1}{2}dx}_{\text{Base dual}} \qquad dx = 2\omega^2$$

La base recíproca $\{w_1, w_2\}$ és aquella que, amb el producte escalar, realitza les mateixes funcions (satisfà les mateixes relacions) que la base dual. Si fem $w_1 = a\partial_t + b\partial_x$, $w_2 = c\partial_t + d\partial_x$ tenim

$$w_1 \cdot v_1 = 1 = a \qquad a = 1$$
$$w_1 \cdot v_2 = 0 = a - 2b \qquad b = 1/2$$
$$w_2 \cdot v_1 = 0 = c \qquad c = 0$$
$$w_2 \cdot v_2 = 1 = c - 2d \qquad d = -1/2$$

El producte escalar és el Minkowskià donat per la mètrica $dt \otimes dt - dx \otimes dx$.

Per tant la base recíproca és
$$\underbrace{\begin{cases} w_1 = \partial_t + \tfrac{1}{2}\partial_x \\ w_2 = -\tfrac{1}{2}\partial_x \end{cases}}$$
i, per tant
$$\partial_t = w_1 + w_2 \qquad \partial_x = -2w_2$$

- $A = t\partial_t + x\partial_x = t v_1 + x\left(-\frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2}\right) = \left(t - \frac{x}{2}\right)v_1 + \frac{x}{2}v_2 = A^{i'}v_i$ expressió en la base v_i

  $A^i \partial_{x^i}$

  $= t(w_1 + w_2) + x(-2w_2) = t w_1 + (t - 2x)w_2 = A^{i''}w_i$ " " " w_i

- $g = dt \otimes dt - dx \otimes dx = (\omega^1 + \omega^2) \otimes (\omega^1 + \omega^2) - 4\omega^2 \otimes \omega^2 = \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^1 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega^1 - 3\omega^2 \otimes \omega^2$

  $g(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ és la forma matricial. $A_{i'} = g_{i'j'}A^{j'}$ és l'expressió que dóna les components del vector covariant associat. Matricialment tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t - x/2 \\ x/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - x/2 + x/2 = t \\ t - x/2 - \frac{3x}{2} = t - 2x \end{pmatrix} \Rightarrow A_{cov} = t\omega^1 + (t - 2x)\omega^2$$

Podem veure que les components del vector covariant associat en la base $\{\omega^i\}$, dual de la $\{v_i\}$ són les mateixes que les components del vector contravariant en la base $\{w_i\}$, recíproca de la $\{v_i\}$.

Finalment
$$\|A\|^2 = A^{i'}g_{i'j'}A^{j'} = (t - x/2, \ x/2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t - x/2 \\ x/2 \end{pmatrix} = (t - x/2, \ x/2)\begin{pmatrix} t \\ t - 2x \end{pmatrix} =$$
$$= t^2 - \frac{xt}{2} + \frac{xt}{2} - x^2 = t^2 - x^2$$
que, naturalment, coincideix amb $(t, x)\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = A^i g_{ij} A^j$

6) Per a un tensor 2-contravariant $t^{ij}(x) = t^{mn}(y) \frac{\partial x^i}{\partial y^m} \frac{\partial x^j}{\partial y^n} = \frac{\partial x^i}{\partial y^m} T^{mn}(y) \frac{\partial x^j}{\partial y^n}$

en el nostre cas, matricialment

$$t\,(\text{cartesià}) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\, t\,(\text{polars}) \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right)^T = \qquad \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} r\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ -r\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r\sin^3\theta + r\sin\theta\cos^2\theta \\ -r\sin\theta\cos^2\theta - r\sin^3\theta & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & +r\sin\theta \\ -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix}$$

que correspon a l'expressió tensorial

$$t = y\,(\partial_x \otimes \partial_y - \partial_y \otimes \partial_x)$$

Naturalment el caràcter antisimètric del tensor (i de la matriu) s'ha conservat sota el canvi de base associat al canvi de coordenades.

DEPARTAMENT: FÍSICA FONAMENTAL CURS 00-01

MÈTODES MATEMÀTICS DE LA FÍSICA II

Examen del gener de 2001

Solucions de les questions

Q.1

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

$$\begin{aligned} F'(s) &= -\int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt = \mathrm{Im}\int_0^\infty e^{t(-s+i)}\,dt \\ &= -\mathrm{Im}\frac{1}{s-i} = -\frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

$$F(s) = -\int \frac{1}{s^2+1}\,ds = -\mathrm{arctg}\, s + C$$

i la condició de límit per a $s \longrightarrow \infty$ determina $C = \pi/2$.

Q.2 $P(A\wedge \mathrm{bo}) = P(\mathrm{bo}|A)P(A) = 0,495, \quad P(B\wedge \mathrm{bo}) = P(\mathrm{bo}|B)P(B) = 0,441$

$$P(\mathrm{bo}) = P(A\wedge \mathrm{bo}) + P(B\wedge \mathrm{bo}) = 0,936$$

$$P(B|\mathrm{bo}) = \frac{P(B\wedge \mathrm{bo})}{P(\mathrm{bo})} = 0,471$$

Q.3

$$\sum_{j=1}^n T_{ij}a^j = \sum_{j=1}^n T_{ji}a^j\,, \quad \forall a^j \quad i=1,\ldots,n$$

Per a $a^1 = 1$, $a^j = 0$, $j = 2,\ldots,n$ tenim: $\qquad T_{i1} = T_{1i}$

I, en general, per a $a^k = 1$, $a^j = 0$, $j \neq k$ tenim:

$$T_{ik} = T_{ki}$$

i per tant, el tensor és simètric.

Solucions dels problemes

P.1 **(a)** Comparem $y'' - 2y' = \lambda y$ amb $\dfrac{1}{w}\dfrac{d}{dx}\left(wp\dfrac{d}{dx}\right) + qy = \lambda y$ i tenim

$$w' = -2w \qquad p = 1 \qquad q = 0$$

que ens porta a:

$$w = e^{-2x}$$

(b) La solució general de $y'' - 2y - \lambda y = 0$ és

$$y(x) = Ae^{xr_+} + Be^{xr_-}\,, \qquad \text{amb} \qquad r_\pm = 1 \pm \sqrt{1+\lambda}$$

Les condicions de contorn donen:

$$\left.\begin{aligned} &A + B = 0 \\ &Ae^{\pi r_+} + Be^{\pi r_-} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Aquest sistema homogeni té solucions no trivials només si el determinant s'anul-la: $e^{\pi r_+} - e^{\pi r_-} = 0$ que porta a $e^{-2\pi\sqrt{1+\lambda}} = 1$ és a dir: $\sqrt{1+\lambda} = in$
i els valor propis són:

$$\lambda_n = -1 - n^2\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Substituint aquests valors en el sistema tenim: $A = -B$, de manera que la funció pròpia corresponent a λ_n és:

$$u_n = A_n e^x \sin(nx)\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Aquí és obvi que cap dels autovalors no és degenerat.
La condició de norma unitat implica $A_n = \sqrt{2/\pi}$.
El cas $\lambda_0 = -1$ s'ha de tractar apart, perquè llavors la solució general de l'eq. diferencial és $y = e^x\,(A + Bx)$. En aquest cas les condicions de contorn donen: $A = B = 0$ i $\lambda_0 = -1$ no és autovalor.

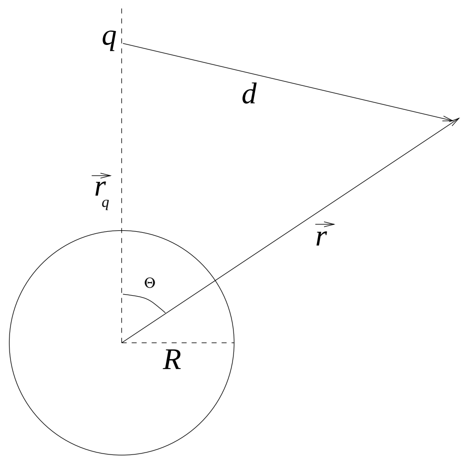
(c) Relacions d'ortogonalitat:

$$(u_n, u_m) = \int_0^\pi dx\, e^{-2x}\, \overline{u_n(x)} u_m(x) = 0$$

sempre que $n \neq m$.

P.2 Si diem $a = |\vec{r}_q|$ i
$d = |\vec{r} - \vec{r}_q| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}$
Sobre l'esfera tenim que la càrrega crea un potencial

$$V_q(R,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{1 - 2R\cos\theta/a + R^2/a^2}}$$



La esfera conductora crea un potencial, que al tenir simetria axial no depèn de ϕ i la solució general de l'equació de Laplace és

$$V_h = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

A la regió exterior com el potencial a l'infinit ha de tendir a zero això implica $A_l = 0$
Com l'esfera és conductora el potencial a la superfície ha de ser constant

$$k = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{1 - 2R\cos\theta/a + R^2/a^2}} + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

ara bé com que $a > R$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2R\cos\theta/a + R^2/a^2}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{R^l}{a^l}P_l(\cos\theta)$$

i igualant els coeficients per a tots els P_l tenim

$$B_l = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^{2l+1}}{a^{l+1}} + kR\delta_{l0}, \qquad l = 0, 1, 2, \cdots$$

La solució general s'obté sumant les dues

$$V(r,\theta) = V_q(r,\theta) + V_h(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_q|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{R^{2l+1}}{a^{l+1}}\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) + K\frac{R}{r}$$

Si ens allunyem molt es com si hi hagues una càrrega puntual a l'origen, és el moment monopolar de la distribució el que domina $\lim_{r\to\infty} V(r,\theta) \sim q/(4\pi\epsilon_0 r)$ i per tant la contribució de l'esfera s'ha d'anul·lar i prenent el límit en l'equació anterior es determina la k

$$\lim_{r\to\infty} V(r,\theta) \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}\frac{R}{r} + k\frac{R}{r}$$

per tant tenim $k = q/(4\pi\epsilon_0 a)$.

Finalment

$$V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_q|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{R^{2l+1}}{a^{l+1}}\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

DEPARTAMENT: FÍSICA FONAMENTAL CURS 99-00

MÈTODES MATEMÀTICS DE LA FÍSICA II

Examen del juny de 2000

Solucions dels problemes

P.1 a) La mètrica 2-covariant en coordenades esfèriques és:

$$T_2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta^2 d\phi^2$$

i la 2-contravariant

$$T^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin\theta^2}\partial_\phi^2$$

Com a matriu és la inversa de la covariant. La norma del camp $\mathbf{A}$ és

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{g_{ij}A^iA^j} = (r^2\sin\theta, r\cos\theta, 0)\begin{pmatrix} r^2\sin\theta \\ r^3\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = r^4$$

La norma del camp ω és

$$|\omega| = \sqrt{g^{ij}\omega_i\omega_j} = (0, r\sin\theta, r\sin\theta\cos\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta/r \\ \cos\theta/(r\sin\theta) \end{pmatrix} = 1$$

La contracció $\omega(\mathbf{A})$ és:

$$(0, r\sin\theta, r\cos\theta)\begin{pmatrix} r^2\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = r^2\sin\theta\cos\theta$$

b) Donat que $\partial_r = \mathbf{e}_r, \partial_\theta = r\mathbf{e}_\theta, \partial_\phi = r\sin\theta\mathbf{e}_\phi$ i que

$$dr = \mathbf{e}^r, d\theta = \frac{1}{r}\mathbf{e}^\theta, d\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}^\phi$$

tenim $\mathbf{A} = r^2(\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta)$ i $\omega = \sin\theta\mathbf{e}^\theta + \cos\theta\mathbf{e}^\phi$

En coordenades cartesianes, si fem servir la notació x^i per a les components cartesianes i y^j per a les esfèriques, tenim

$$A'^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}A^j(x)$$

calculant les derivades tenim:

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2\cos\phi \\ r^2\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

és a dir

$$\mathbf{A} = r^2(\cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\phi\,\hat{\jmath}) = \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})$$

Com en components cartesianes les coordenades covariants i contravariants coincideixen si escrivim el vector ω en la base contravariant podem fer servir la mateixa matriu del canvi, el camp a transformar és

$$\left(0, \frac{\sin\theta}{r}, \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\right)$$

que en coordenades cartesianes s'escriu $\cos\theta(\sin\theta\cos\phi - \sin\phi)\hat{\imath} + \cos\theta(\sin\theta\sin\phi + \cos\phi)\,\hat{\jmath} - \sin\theta^2\hat{k}$ que escrit en la base dx, dy, dz i com a funció de (x, y, z) és

$$\frac{z}{r}\left(\frac{x}{r} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx + \frac{z}{r}\left(\frac{y}{r} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy - \frac{x^2+y^2}{r^2}dz$$

c) La matriu del tensor T^i_j

$$\begin{pmatrix} 0 & r^3\sin\theta^2 & r^3\sin\theta^2\cos\theta \\ 0 & r^2\cos\theta\sin\theta & r^2\cos\theta^2\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La traça d'aquesta matriu és un escalar i és la contracció $\omega(\mathbf{A})$ que em calculat a l'apartat a).

P.2 a) Fem el canvi de variable $x = \lambda r$

$$\int_0^R r^2 J_1(\lambda r)dr = \frac{1}{\lambda^3}\int_0^{\lambda R} x^2 J_1(x)dx$$

del Schaums 31.21

$$x^2 J_1(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 J_2(x)\right)$$

aleshores

$$\frac{1}{\lambda^3}\int_0^{\lambda R} x^2 J_1(x)dx = \frac{1}{\lambda}R^2 J_2(\lambda R)$$

b) En polars tenim com que ni les condicions de contorn ni la funció que busquem depenen de z, ϕ l'equació a integrar és:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2}F$$

Busquem solucions que admetin separació de variables $F(t, r) = T(t)g(r)$ així tenim

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{1}{g}\left(\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dg}{dr}\right) - \frac{1}{r^2}$$

cada costat només depèn d'una variable per tant han de ser igual a una constant, per obtenir fiuncions $T(t)$ ben comportades a $\pm\infty$ posem la constant $-w^2$ així tenim

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -w^2 T$$

i les solucions són $T(t) = A\cos wt + B\sin wt$ pero de la segona condició inicial

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t=0,r) = 0 \to T'(0) = 0$$

i per tant $B = 0$. L'equació radial queda

$$r^2\frac{d^2g}{dr^2} + r\frac{1}{r}\frac{dg}{dr} + (w^2r^2 - 1)g = 0$$

que fent $x = wr$ és l'equació de Bessel per a $n = 1$ i per tant la solució és $g(r) = CJ_1(wr) + DY_1(wr)$ però com per la condició d'acotació ha de ser finita a $r = 0$ tenim $D = 0$

Ara demanem la condició de contorn $F(t,R) = 0$, a les solucions això vol dir que $J_1(wR) = 0$ és a dir no totes les constants reals w són bones constants de separació, només ho són aquelles que $w_jR =$ un zero de la funcio J_1 de Bessel. Finalment tenim:

$$F(t,r) = \sum_j A_j \cos w_j t J_1(w_j r) \quad | \quad J_1(w_jR) = 0$$

Imposem ara la darrera condició inicial $F(t=0,r) = \alpha r = \sum_j A_j J_1(w_j r)$ De la propietat d'ortogonalitat de les funcions de Bessel, fent el producte amb $J_1(w_k r)$ tenim

$$\sum_j A_j \int_0^R rJ_1(w_jr)J_1(w_kr)dr = A_k\frac{R^2}{2}[J_1'(w_kR)]^2 = \alpha\int_0^R r^2J_1(w_kr)dr$$

aquesta darrera integral l'hem calculat a l'apartat a) i val $\alpha R^2 J_2(w_kR)/w_k$ així obtenim A_k

$$A_k = \frac{2\alpha}{w_k}\frac{J_2(w_kR)}{[J_1'(w_kR)]^2}$$

P.3 i a) tranformem per Laplace l'equació diferencial $s^2\hat{y}(s) + 4s\hat{y}(s) + 3\hat{y}(s) = \mathcal{L}[\sin x]$ per tant

$$\hat{y}(s) = \frac{\mathcal{L}[\sin x]}{s^2+4s+3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}\right)\mathcal{L}[\sin x] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-x} - e^{-3x}]\mathcal{L}[\sin x]$$

producte de transformades podem aplicar el teorema de convolució.

$$y(x) = \frac{1}{2}\int_0^x dt\,\left(e^{-t} - e^{-3t}\right)\sin(x-t) = \frac{\sin x}{10} - \frac{\cos x}{5} + \frac{e^{-x}}{4} - \frac{e^{-3x}}{20}$$

b) per resoldre el problema directament

$$\hat{y}(s) = \frac{\mathcal{L}[\sin x]}{s^2+4s+3} = \frac{1}{(s^2+4s+3)(s^2+1)} = \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{20}\frac{1}{s+3} + \frac{1}{10}\frac{1-2s}{s^2+1}$$

on hem descomposat en fraccions simples i ara la transformada inversa

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{y}(s)] = \frac{e^{-x}}{4} - \frac{e^{-3x}}{20} + \frac{1}{10}(\sin x - 2\cos x)$$

P.4

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega_0 t e^{-it\omega} dt = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} f(t) \left(e^{it\omega_0} - e^{-it\omega_0} \right) e^{-it\omega} dt =$$

$$\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} f(t) \left(e^{-it(\omega-\omega_0} - e^{-it(\omega+\omega_0)} \right) dt = \frac{g(\omega-\omega_0) - g(\omega+\omega_0)}{2i}$$

P.5 a) Es tracta d'una distribució binomial amb $n = 10$ i $p = 1/2, q = 1/2$ la probabilitat de tenir i respostes correctes és

$$B(10, 1/2)(i) = \binom{10}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

La probabilitat d'aprovar és la de tenir 5 o més respostes correctes $P(i \geq 5) = 1 - P(i < 5)$

$$P(i < 5) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} \right) = \frac{386}{2^{10}} = 0,377$$

per tant $P(i \geq 5) = 1 - 0,377 = 0,623$

b) Si en fa bé 8 en falla 2 per tant té un 6 i aprova. Si en fa bé 7 en falla 3 i té un 4 i per tant suspen.

$$P(i > 7) = P(8) + P(9) + P(10) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} \right) = \frac{56}{1024} = 0.0546875$$

c) La binomial ve caracteritzada per uns paràmetres $n = 1000$ i $p = 0.0547$ com $np \geq 10$ podem aproximar per una gaussiana, doncs n gran i p petit no és garantia suficient si per exemple $np \approx 1$ caldria fer servir Poisson, que en el nostre cas vindria caracteritzat per un paràmetre $\lambda = pn = 54,6875$.

La gaussiana tindrà com paràmetres la mitjana ja l'hem calculat i val 54,7 i la $\sigma^2 = np(1 - p) = 54,6875(1 - 0,0546875) = 51,697$ o bé $\sigma = 7,19$

d)

$$P_{60}(\text{Poisson}) = \frac{\exp(-54,6875)\, 54,5875^{60}}{60!} = 0,040052$$

La de la gaussiana sera l'àrea entre els valors de la variable x 59,5 i 60,5 i per a la variable estandaritzada $y = (x - 54,7)/\sigma$ entre $y = 0,6693$ i $y = 0,8084$

$$P_{\text{Gauss}}(60) = \text{fer}(0,8084) - \text{fer}(0,6693) = 0,0421$$

e) La probabilitat d'aprovar més de 60 és

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{59,5}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - 54,7)^2}{2\sigma^2} \right) dx$$

si estandaritzem la variable tenim

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0,6693}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2} \right) dy = 1 - \text{fer}(0,6693) = 0,2516$$

Enunciat i solució coherents.

29 de juny de 2000

P.1 Sigui el conjunt $\{r,\theta,\phi\}$ un sistema de coordenades esfèriques de l'espai euclidià ordinari. Considerem donats el camp vectorial contravariant $\mathbf{A} = (r^2\sin\theta, r\cos\theta, 0) = r^2\sin\theta\,\partial_r + r\cos\theta\,\partial_\theta$ i la forma diferencial o camp vectorial covariant $\omega = (0, r\sin\theta, r\sin\theta\cos\theta) = r\sin\theta\, d\theta + r\sin\theta\cos\theta\, d\phi$

- Determineu, mitjançant la mètrica 2-covariant i la mètrica 2-contravariant en coordenades esfèriques, les normes dels camps $\mathbf{A}$ i ω. Calculeu també la contracció $\omega(\mathbf{A})$.
- Doneu les expressions dels camps $\mathbf{A}$ i ω en la base esfèrica ortonormal o física $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$ així com en les bases i coordenades cartesianes que es corresponen al sistema de coordenades esfèriques escollit.
- Construïu la matriu del tensor $T^i_j = \mathbf{A}^i\,\omega_j$. Quin significat i quin caràcter tensorial té la traça d'aquesta matriu?

2 punts

Mètrica 2-covariant $T_2 = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = dr\otimes dr + r^2\, d\theta\otimes d\theta + r^2\sin^2\theta\, d\varphi\otimes d\varphi$

correspon a $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$ $\qquad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$

Mètrica 2-contravariant $T^2 = g^{ij}\,\partial_{x^i}\otimes\partial_{x^j} = \partial_r\otimes\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta\otimes\partial_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi\otimes\partial_\varphi$

Matricialment és la inversa de la 2-covariant $\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/r^2 & \\ & & 1/r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$

En general, per a sistemes ortogonals de coordenades $ds^2 = \sum h_i^2\, dx^{i^2}$

Els h_i són els coeficients de Lamé i els h_i^2 estan donats al Schaum

El seu significat geomètric és $|\partial_i| = h_i$ $\quad |dx^i| = \frac{1}{h_i}$ $\quad$ normes de les bases contravariant i covariants, respectivament

(variació longitud per unitat de coordenada) $\quad$ (variació de coordenada per unitat de longitud)

---

1) $|A| = \sqrt{g_{ij}A^iA^j}$ $\qquad |A|^2 = (r^2\sin\theta, r\cos\theta, 0)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r^2\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= (r^2\sin\theta, r\cos\theta, 0)\begin{pmatrix} r^2\sin\theta \\ r^3\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = r^4(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r^4 \Rightarrow |A| = r^2$

$|\omega| = \sqrt{g^{ij}\omega_i\omega_j}$

$|\omega|^2 = (0, r\sin\theta, r\sin\theta\cos\theta)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/r^2 & \\ & & 1/r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ r\sin\theta \\ r\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = (0, r\sin\theta, r\sin\theta\cos\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sin\theta}{r} \\ \frac{\cos\theta}{r\sin\theta} \end{pmatrix} =$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow |\omega| = 1$

$\omega(A) = \omega_i A^i = (0, r\sin\theta, r\sin\theta\cos\theta)\begin{pmatrix} r^2\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = r^2\cos\theta\sin\theta = \frac{r^2\sin 2\theta}{2}$

2) Donat que $\partial_r = e_r$ $\quad \partial_\theta = r e_\theta$ $\quad \partial_\varphi = r\sin\theta\, e_\varphi$ $\Rightarrow$ $A = r^2\sin\theta\, e_r + r^2\cos\theta\, e_\theta$

$dr = e^r \sim e_r$ $\quad d\theta = \frac{1}{r} e^\theta \sim \frac{1}{r} e_\theta$ $\quad d\varphi = \frac{1}{r\sin\theta} e^\varphi \sim \frac{1}{r\sin\theta} e_\varphi$ $\qquad \omega = \sin\theta\, e_\theta + \cos\theta\, e_\varphi$

o, en components "esfèriques ortonormals o físiques" $\quad A = (r^2\sin\theta,\ r^2\cos\theta,\ 0)$ $\quad \omega = (0,\ \sin\theta,\ \cos\theta)$ $\qquad \omega(A) = \omega\cdot A$

En components cartesianes: $\quad A^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} A^j(x)$ $\qquad A^i(x,y,z) = \left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right]^i_{\ j} A^j(r,\theta,\varphi)$ amb r,θ,φ (x,y,z)

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r^2\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2\cos\varphi \\ r^2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$\Rightarrow A = r^2\cos\varphi\, e_x + r^2\sin\varphi\, e_y = (x^2+y^2+z^2)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x e_x + y e_y)$ $\qquad e_x, e_y, e_z \equiv i, j, k$ habituals

Per a ω podem fer servir la matèixa matriu si l'expressem en la base contravariant:

$$\omega \simeq \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\partial_\varphi \qquad \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta/r \\ \cos\theta/r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \\ -\sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{xz}{r^2} - \frac{yz}{r\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{yz}{r^2} + \frac{xz}{r\sqrt{x^2+y^2}} \\ -(x^2+y^2)/r^2 \end{pmatrix}$$

3) $\quad T^i_{\ j} = A^i \omega_j$ $\leftarrow$ index columna; A^i: i index fila $\quad \Rightarrow$ col·locar A en columna i ω com a fila:

$$(T^i_{\ j}) = \begin{pmatrix} r^2\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}(0,\ r\sin\theta,\ r\sin\theta\cos\theta) = \begin{pmatrix} 0 & r^3\sin^2\theta & r^3\sin^2\theta\cos\theta \\ 0 & r^2\sin\theta\cos\theta & r^2\sin\theta\cos^2\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Traça $(T^i_{\ j}) = r^2\sin\theta\cos\theta = T^i_{\ i}$ és una magnitud escalar i es correspon a l'actuació de la 1-forma o vector covariant ω sobre el vector A $\quad \omega(A) = \omega_i A^i = T^i_{\ i}$

DEPARTAMENT: FÍSICA FONAMENTAL CURS 99-00

MÈTODES MATEMÀTICS DE LA FÍSICA II

Examen del gener de 2000

Solucions de les questions

Q.3 Posant $\Psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ i dividint per Ψ tenim

$$\frac{1}{R}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)R + \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z = 0$$

la part de Z nomes depèn de z i l'altra no hi depèn podem posar

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z = \pm\alpha^2 \begin{cases} +\alpha^2 \text{ solucions} & Z = exp(\pm\alpha z) \\ -\alpha^2 \text{ solucions} & Z = exp(\pm i\alpha z) \end{cases}$$

La solució que em de triar amb $+\alpha^2$ o $-\alpha^2$ depèn de les condicions de contorn per a la variable z.
L'equació per la resta de variables multiplicada per ρ^2 queda:

$$\frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)R + \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi \pm \alpha^2\rho^2 = 0$$

Com abans ara tenim una part que només depèn de ρ i l'altra que nomès depèn de φ

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi = -m^2$$

ha de ser $-m^2$ amb $m \in Z$ per que sigui periòdica en φ. La solució és $\Phi = \exp(im\varphi)$.
Finalment l'equació per a la funció $R(\rho)$ queda

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)R + (\pm\alpha^2\rho^2 - m^2)R = 0$$

Per al signe $+$ les solucions són les funcions de Bessel $J_m(\alpha\rho)$ i per al signe $-$ les funcions modificades de Bessel $J_m(i\alpha\rho)$

Q.4

$$P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$$

$P(A \bigcap B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcup B)$ i a més $P(A \bigcup B) \leq 1 \quad \rightarrow P(A \bigcap B) \geq p + q - 1$
llavors

$$P(A|B) \geq \frac{p+q-1}{q}.$$

Solucions dels problemes

P.1 a) Els vectors tangents a les linies coordenades q^1, q^2 són:

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial x}{\partial q^1}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial q^1}\hat{\jmath}, \qquad \vec{e}_2 = \frac{\partial x}{\partial q^2}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial q^2}\hat{\jmath}$$

després de derivar i una mica de càlcul obtenim:

$$\frac{\partial x}{\partial q^1} = -\frac{\partial y}{\partial q^2} = \frac{a}{D^2}(1 - \cosh q^1 \cos q^2), \qquad \frac{\partial x}{\partial q^2} = \frac{\partial y}{\partial q^1} = -\frac{a}{D^2}\sinh q^1 \sin q^2$$

on $D = \cosh q^1 - \cos q^2$ el producte escalar de $\vec{e}_1$ per $\vec{e}_2$ és:

$$\frac{\partial x}{\partial q^1}\frac{\partial x}{\partial q^2} + \frac{\partial y}{\partial q^1}\frac{\partial y}{\partial q^2} = \frac{\partial x}{\partial q^2}\left(\frac{\partial x}{\partial q^1} + \frac{\partial y}{\partial q^2}\right) = 0$$

és a dir són ortogonals.

b) El tensor mètric en la nova base és:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_1 & \vec{e}_1\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2\vec{e}_1 & \vec{e}_2\vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2/D^2 & 0 \\ 0 & a^2/D^2 \end{pmatrix}$$

c) Diem $v_{i'}$ a les components covariants del vector $\hat{\imath}$ i $u_{i'}$ a les components covariants del vector $\hat{\jmath}$ en la base $\vec{e}_i$, donat que els vectors $\hat{\imath}$ i $\hat{\jmath}$ tenen components $v_1 = 1, v_2 = 0$ i $u_1 = 0, u_2 = 1$ i per les components covariants tenim:

$$v_{i'} = v_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$$

aleshores

$$v_{1'} = \frac{\partial x}{\partial q^1}, \quad v_{2'} = \frac{\partial x}{\partial q^2}, \quad u_{1'} = \frac{\partial y}{\partial q^1}, \quad u_{2'} = \frac{\partial y}{\partial q^2}$$

per trovar les components contravariants $v^{i'} = g^{i'j'}v_{j'}$ i donat que $g^{i'j'}$ és la inversa de $g_{i'j'}$ tenim

$$v^{1'} = \frac{D^2}{a^2}\frac{\partial x}{\partial q^1}, \quad v^{2'} = \frac{D^2}{a^2}\frac{\partial x}{\partial q^2}, \quad u^{1'} = \frac{D^2}{a^2}\frac{\partial y}{\partial q^1}, \quad u^{2'} = \frac{D^2}{a^2}\frac{\partial y}{\partial q^2}$$

P.2 La transformada de Fourier és $\tilde{A}(w)$

$$\begin{aligned} \tilde{A}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(t)e^{-iwt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} A_0 \exp\left(t\left(i(w_0 - w) - \frac{w_0}{2Q}\right)\right)dt = \\ & \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i(w - w_0) + w_0/(2Q)} \end{aligned}$$

i la distribució en freqüències de l'oscil·lació

$$\tilde{A}(w)\tilde{A}^*(w) = \frac{A_0^2}{2\pi}\frac{1}{(w - w_0)^2 + w_0^2/Q^2}$$

P.3 La transformada de Laplace de l'equació $m\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+kx(t)=0$ amb les condicions inicials $x(0)=0$ i $\dot{x}(0)=v_0$ és:

$$m(s^2\hat{x}(s)-v_0)+bs\hat{x}(s)+k\hat{x}(s)=0$$

i per tant

$$\hat{x}(s)=\frac{v_0}{s^2+bs/m+k/m}=\frac{v_0}{(s+b/(2m))^2+k/m-b^2/(4m^2)}$$

per trobar l'antitransformada de Laplace com que $\mathcal{L}^{-1}(\hat{y}(s+\alpha))=\exp(-i\alpha t)\mathcal{L}^{-1}(\hat{y}(s))$ tenim

$$x(t)=v_0\exp\left(-\frac{bt}{2m}\right)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+k/m-b^2/(4m^2)}\right)=v_0\exp\left(-\frac{bt}{2m}\right)\mathcal{L}^{-1}(\hat{y}(s))$$

per a aquesta antitransformada, $\mathcal{L}^{-1}(\hat{y}(s))$, tenim tres casos segons el signe del factor constant del denominador

a) infraesmorteït $b^2<4mk$ definim $w^2=\dfrac{k}{m}-\dfrac{1}{4}\dfrac{b^2}{m^2}$ $\quad\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\hat{y}(s))=\dfrac{1}{w}\sin wt$

b) esmorteïment crític $b^2=4mk$ $\quad\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\hat{y}(s))=t$

c) sobreesmorteït $b^2>4mk$ definim $\beta^2=\dfrac{1}{4}\dfrac{b^2}{m^2}-\dfrac{k}{m}$ $\quad\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\hat{y}(s))=\dfrac{1}{\beta}\sinh\beta t$

P.4 a) Probabilitat que un sigui més llarg que $L_1=1-p_1$
Probabilitat que quatre siguin més llargs que $L_1=(1-p_1)^4$

b) La probabilitat que un tingui longitud entre L_1 i $L_2=1-p_1-p_2$
La probabilitat que tres tinguin longituds entre L_1 i $L_2=\binom{4}{1}(1-p_1-p_2)^3(p_1+p_2)$

c) $1-$ la probabilitat que quatre siguin de longitud menor que $L_2=1-(1-p_2)^4$
d) La probabilitat que com a molt hi hagi dos cargols amb una longitud entre L_1 i $L_2=$ probabilitat que no en hi hagi cap, 1 o 2.
(Probalitat de cap $=(p_1+p_2)^4$)+ (Probalitat d'un $=\binom{4}{1}(1-p_1-p_2)(p_1+p_2)^3$)+ (Probalitat de dos $=\binom{4}{2}(1-p_1-p_2)^2(p_1+p_2)^2$) $=(p_1+p_2)^2((p_1+p_2)^2+4(p_1+p_2)(1-p_1-p_2)+6(1-p_1-p_2)^2)$

DEPARTAMENT: FÍSICA FONAMENTAL CURS 00-01

MÈTODES MATEMÀTICS DE LA FÍSICA II

Examen de juny de 2001

Solucions de les questions

Q.1 La transformada de Laplace és

$$s^2X(s) - \dot{x}(0) + bsX(s) + kX(s) = 0 \Rightarrow X(s) = \frac{\dot{x}(0)}{s^2 + bs + k}$$

el denominador pot escriure's $(s + b/2)^2 + k - b^2/4$ i la transformada inversa és

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-bt/2} \sin(\omega t), \quad \text{on } \omega = \sqrt{k - b^2/4}$$

Q.2 La probabilitat que almenys surti un 6 és la del complementari que no en surti cap, $P(A) = 1 - P(0) = 1 - (5/6)^3 = 91/216$

Que no en surtin dos d'iguals, el primer pot ser qualsevol $P = 1$ el segon qualsevol diferent del primer $P = 5/6$ i el tercer diferent del primer i del segon $P = 4/6$ per tant tenim

$$P(B) = P(\text{tres de diferents}) = 1\,\frac{5}{6}\frac{4}{6} = \frac{5}{9}$$

La probabilitat que entre tres resultats diferents i hagi un 6 és 1/2

$$P(A \cap B) = \frac{5}{9}\frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ per tant no són independents

Q.3 Si fem un canvi de coordenades $x^i \to x^{j'}$ el tensor covariant i el vector contravariant canvien

$$T_{l'n'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{n'}} T_{ij}, \quad \text{i} \quad v^{n'} = \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^k} v^k \quad \text{així} \quad T_{l'n'} v^{n'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{n'}}\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^k} T_{ij} v^k$$

ara bé

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^{n'}}\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^k} = \delta^j_k \quad \text{així} \quad T_{l'n'} v^{n'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}} T_{ij} v^j = \frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}} \lambda v_i = \lambda v_{l'}$$

com voliem demostrar ja que

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}} v_i = v_{l'}$$

λ no canvia sota canvis de coordenades i és un escalar

Q.4 Les coordenades cartesianes en funció de les cilindríques són $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$ o bé el canvi invers $\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \varphi = \arctan y/x,\ z = z$.

En coordenades cartesianes la base contravariant són els vectors $\vec{e}_x = \hat{\imath}, \vec{e}_y = \hat{\jmath}, \vec{e}_z = \hat{k}$ i la base covariant els vectors del dual $\vec{\theta}^x, \vec{\theta}^y, \vec{\theta}^z$. La base covariant en coordenades cilíndriques són els covectors $\vec{\theta}^\rho, \vec{\theta}^\varphi, \vec{\theta}^z$ i tenim

$$\vec{\theta}^\rho = \frac{\partial\rho}{\partial x}\vec{\theta}^x + \frac{\partial\rho}{\partial y}\vec{\theta}^y = \cos\varphi\vec{\theta}^x + \sin\varphi\vec{\theta}^y, \quad \vec{\theta}^\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\theta}^x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\theta}^y = -\frac{\sin\varphi}{\rho}\vec{\theta}^x + \frac{\cos\varphi}{\rho}\vec{\theta}^y$$

Fem-ho d'una altra manera en components.

$\vec{\theta}^\rho$ en la seva base té components $\omega_\rho = 1, \omega_\varphi = 0, \omega_z = 0$ en la base dual o covariant cartesiana tindrà components

$$\omega_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\omega_{j'}$$

així tenim que les components del vector covariant $\vec{\theta}^\rho$ en la base $\vec{\theta}^x, \vec{\theta}^y, \vec{\theta}^z$ són

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}, \frac{\partial\rho}{\partial y}, \frac{\partial\rho}{\partial z}\right) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

$\vec{\theta}^\varphi$ en la seva base té components $\omega_\rho = 0, \omega_\varphi = 1, \omega_z = 0$ en la base dual o covariant cartesiana tindrà components

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}, \frac{\cos\varphi}{\rho}, 0\right)$$

$\vec{\theta}^z$ en la seva base té components $\omega_\rho = 0, \omega_\varphi = 0, \omega_z = 1$ en la base dual o covariant cartesiana tindrà components

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z}\right) = (0, 0, 1)$$

El tensor mètric covariant en coordenades cartesianes és δ_{ij} i el contravariant δ^{ij}. Podem trobar les components en coordenades cilindríques fent el canvi de base, per exemple

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}}\delta_{kl}$$

així tenim

$$g_{\rho\rho} = \frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial x}{\partial\rho} + \frac{\partial y}{\partial\rho}\frac{\partial y}{\partial\rho} + \frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho} = 1$$

El mateix per $g_{\varphi\varphi} = \rho^2$ i $g_{zz} = 1$ Per calcular el contravariant podem trobar la matriu inversa i tenim $g^{\rho\rho} = 1,\ g^{\varphi\varphi} = 1/\rho^2,\ g^{zz} = 1$

Solucions dels problemes

P.1 Com les condicions de contorn no depenen de z ni φ tenim simetria i la solució no dependrà d'aquestes variables. D'altra banda el camp magnètic fora té la direcció de l'eix z i es aquest el que es difondrà per tant tenim $\vec{H} = H(r,t)\hat{k}$.

L'equació queda

$$\frac{\partial H(r,t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H(r,t)}{\partial r}\right) = 0$$

La condició de contorn no és homogènia doncs tenim $H(r_0,t) = H_0$ però podem posar $\tilde{H}(r,t) = H(r,t) - H_0$ i aleshores $\tilde{H}(r,t)$ verifica la meteixa equació i a més $\tilde{H}(r_0,t) = 0$.

Busquem solucions separables del tipus $\tilde{H}(r,t) = R(r)T(t)$ amb una mica de càlcul s'arriba a

$$\frac{1}{\alpha^2 T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)$$

Com que un costat depèn de t i l'altre de r són constants ambdos. Aquesta constant de separació no pot ser positiva doncs el camp creixeria indefinidament amb t, així agafem

$$\frac{1}{\alpha^2 T}\frac{dT}{dt} = -k^2 \quad \text{i} \quad \frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = -k^2$$

La solució de la primera és

$$T(t) = Ae^{-\alpha^2 k^2 t}$$

i la segona queda

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + k^2 r^2 R = 0$$

que fent el canvi $\rho = kr$ és l'equació de Bessel d'ordre 0 amb solució $R(\rho) = BJ_0(\rho) + CY_0(\rho)$ Com volem que la solució sigui ben comportada dins del cilindre i $r = 0$ vol dir $\rho = 0$ i la funció $Y_0(\rho)$ divergeix a l'origen tenim que agafar $C = 0$. Finalment

$$\tilde{H}(r,t) = \sum_k A_k e^{-\alpha^2 k^2 t} J_0(kr)$$

Imposem ara la condició de contorn $\tilde{H}(r_0,t) = 0$ i aleshores $J_0(kr_0) = 0$ no tots els valors de k són permesos solament aquells que $kr_0 = x_n$ on x_n és el zero enèssim de J_0 això fa que l'operador sigui hermític en l'interval $[0, r_0]$

$$\tilde{H}(r,t) = \sum_n A_n e^{-\alpha^2 x_n^2 t/r_0^2} J_0(x_n r/r_0)$$

Les constants A_n s'han de determinar amb la condició inicial $\tilde{H}(r,0) = -H_0 = \sum_n A_n J_0(x_n r/r_0)$ Fent servir la relacions d'ortogonalitat multipliquem per $rJ_0(x_m r/r_0)$ i integrem a l'interval $[0, r_0]$ al costat dret queda

$$\sum_n A_n \delta_{nm} \frac{r_0^2}{2} J_1(x_m) \quad \text{i l'esquerra} - H_0 \frac{r_0^2}{x_m} J_1(x_m)$$

aïllant tenim

$$A_m = -\frac{2H_0}{x_m J_1(x_m)}$$

Agrupant tots els resultats tenim

$$\boxed{H(r,t) = H_0\left(1 - 2\sum_n \frac{1}{x_n J_1(x_n)} e^{-\alpha^2 x_n^2 t/r_0^2} J_0(x_n r/r_0)\right)}$$

Per calcular el flux tenim que $\vec{H}$ i $d\vec{S}$ tenen la mateixa direcció $\vec{H}d\vec{S} = HdS$ amb $dS = r\,dr\,d\varphi$ com res depèn de φ l'integral per l'angle dóna 2π i solament cal calcular

$$\int_0^{r_0} r\,dr J_0(x_n r/r_0) = \frac{r_0^2}{x_n} J_1(x_n)$$

així el flux és

$$\boxed{\Phi = \pi H_0 r_0^2 \left(1 - \sum_n \frac{4}{x_n^2} e^{-\alpha^2 x_n^2 t/r_0^2}\right)}$$

P.2 a) Perquè pugui ser una densitat de probabilitat cal que estigui normalitzada

$$k\left(\int_{-1}^{1} dx + 2\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}\right) = k(x|_{-1}^{1} - \frac{2}{3}\frac{1}{x^3}\bigg|_1^\infty = 2k\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 1$$

aleshores $k = 3/8$.

b)

$$2k\left(\int_0^1 dx + \int_1^b \frac{1}{x^4} dx\right) = 0,9, \quad \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{b^3}\right) = 0,9 \Rightarrow b = 1,357$$

c) El valor esperat es defineix com

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \qquad \text{i en el nostre cas tenim}$$

$$k\left(\int_{-1}^{1} x\,dx + \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} + \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^3}\right) = k\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{1} - \frac{1}{2x^2}\bigg|_1^\infty - \frac{1}{2x^2}\bigg|_{-\infty}^{-1}\right) = 0$$

ASSIGNATURA: MÈTODES MATEMÀTICS DE LA FÍSICA II

DEPARTAMENT: FÍSICA FONAMENTAL

Examen del 23 de gener de 2002

Solució dels problemes

P.1 L'equació de Laplace $\nabla^2 T = 0$ en coordenades polars en dues dimensions és

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0$$

Separan variables $T(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ multiplicant per r^2 i dividint per T queda

$$\frac{r^2}{R}\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}$$

Ara bé la part de Φ solament depèn de φ i l'altra de r així tenim

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} = \alpha$$

aquesta equació ha de donar solucions periòdiques de període 2π i això implica que $\alpha = -m^2$ amb m enter i les solucions són $\cos m\varphi$ i $\sin m\varphi$ amb $m = 0, 1, \ldots$ sèries de Fourier. l'altre part queda

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - m^2 R = 0$$

La solució d'aquesta equació és del tipus r^k posant-la a l'equació ens queda $k(k-1)+k-m^2 = 0$ i aleshores $k = \pm m$ com s'ha de comportar bé a $r = 0$ ens quedarem amb m finalment

$$T(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)$$

per determinar els coeficients tenim la condició de contorn

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(1,\varphi)\cos m\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{T_1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos m\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \frac{T_2}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\cos m\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

que val zero quan $m \neq 0$ i $T_1 + T_2$ per a $m = 0$ i

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(1,\varphi)\sin m\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{T_1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin m\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \frac{T_2}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin m\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$-\frac{T_1}{m\pi}\cos m\varphi|_0^{\pi} - \frac{T_2}{m\pi}\cos m\varphi|_{\pi}^{2\pi} = \frac{T_1}{m\pi}(1-(-1)^m) + \frac{T_2}{m\pi}(-1+(-1)^m)$$

que val zero per a m parell i $2(T_1 - T_2)/(m\pi)$ per a m senar, així tenim

$$\boxed{T(r,\varphi) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{2(T_1 - T_2)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1} r^{2n+1}\sin(2n+1)\varphi.}$$

P.2 Transformen per Laplace

$$sF(s) - 1 + F(s) + \frac{F(s)}{s} = 0$$

aïllant $F(s)$ tenim

$$F(s) = \frac{s}{s^2+s+1} = \frac{s}{(s+1/2)^2+3/4} = \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{1}{(s+1/2)^2+3/4}$$

finalment l'antitransformada és

$$\boxed{y(t) = e^{-t/2}\left(\cos\sqrt{\frac{3}{4}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{\frac{3}{4}}t\right).}$$

P.3 Diem A_b a l'esdeveniment treure una bola blanca el primer cop i A_n treure bola negra el primer cop les probabilitats són casos favorables dividit per casos possibles i tenim $P(A_b) = 5/7$ i $P(A_n) = 2/7$ aquestes dues possibilitats són una partició de tot el que pot passar, si ara treiem una bola per segona vegada la probabilitat que sigui blanca serà

$$P(b) = P(b|A_b)P(A_b) + P(b|A_n)P(A_n)$$

la $P(b|A_b) = 7/9$ doncs hem retornat la blanca i n'hem afegit dues més i $P(b|A_n) = 5/6$ doncs no hem retornat la negra finalment

$$\boxed{P(b) = \frac{5}{7}\frac{7}{9} + \frac{2}{7}\frac{5}{6} = \frac{50}{63}.}$$

P.4 En coordenades cartesianes el tensor mètric és δ_{ij} i la seva matriu inversa δ^{ij} és el contravariant per tant les components covariants i contravariants coincideixen i tenim $A^1 = xy$, $A^2 = 2y - z^2$ i $A^3 = xz$ en coordenades cartesianes. Les components contravariants d'aquest tensor en coordenades esfèriques seran les transformades d'aquestes

$$A^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}A^j$$

on les coordenades $x^{i'}$ són les esfèriques i les x^i les cartesianes

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \vartheta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{i} \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\varphi}{r\cos\theta},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{zx}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{zy}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} = -\frac{\sin\theta}{r},$$

$$A^r = A^1\frac{\partial r}{\partial x} + A^2\frac{\partial r}{\partial y} + A^3\frac{\partial r}{\partial z} = r\sin\theta(2\sin\theta\sin^2\varphi + r\cos^2\theta(\cos\varphi - \sin\varphi) + r\sin^2\theta\sin\varphi\cos^2\varphi)$$

$$A^\theta = A^1\frac{\partial\theta}{\partial x} + A^2\frac{\partial\theta}{\partial y} + A^3\frac{\partial\theta}{\partial z} = \cos\theta(2\sin\theta\sin^2\varphi + r(\sin^2\theta\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^2\theta\cos\varphi - \cos^2\theta\sin\varphi))$$

$$A^\varphi = A^1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + A^2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + A^3\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \cos\varphi(2\sin\varphi - r(\sin\theta\sin^2\varphi + \cot\theta\cos\theta))$$

Solució de les qüestions

Q.1 De la relació de recurrència $J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$, si agafem $n = 2$ tenim $J_1(x) = \frac{4}{x} J_2(x) - J_3(x)$ i substituint a l'integral queda $\int x^4 J_1(x)\,\mathrm{d}x = 4\int x^3 J_2(x)\,\mathrm{d}x - \int x^4 J_3(x)\,\mathrm{d}x$ però sabem $\int x^n J_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = x^n J_n(x)$ finalment

$$\boxed{\int x^4 J_1(x)\,\mathrm{d}x = 4x^3 J_3(x) - x^4 J_4(x)}$$

Q.2 Si A_i són les components d'un tensor covariant de rang 1 en un canvi de coordenades $y^j = f(x^i)$ es transformen com

$$A_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial y^{i'}} A_j$$

la derivada

$$\frac{\partial A_{i'}}{\partial y^{k'}}$$

es transforma com

$$\frac{\partial}{\partial y^{k'}} \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^{i'}} A_j \right) = \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^{k'} \partial y^{i'}} A_j + \frac{\partial x^j}{\partial y^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial y^{k'}} \frac{\partial A_j}{\partial y^l}$$

el segon terme és com s'hauria de transformar si fos un tensor covariant de segon ordre però hi ha el primer que només és zero quan la transformació és linial, per tant no és un tensor.

Solucions del examen de MMII, 12 juny de 2002:

P.1 i) Problema amb simetria esférica: $c = c(r,t)$. Fem el canvi $c(r,t) = u(r,t)/r$:

$$\triangle c = \triangle \left(\frac{u}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r}\ \left(\frac{u}{r}\right)\right] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u}{\partial r} - u\right] = \frac{1}{r}\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{k\ r}\ \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

Aleshores l'equació per a u que ens demanen és: $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \dfrac{1}{k}\ \dfrac{\partial u}{\partial t}}$

ii) Per resoldre-la, fem la separació de variables: $u(r,t) = R(r)T(t)$:

$$\frac{1}{R}\ \frac{d^2R}{dr^2} = \frac{1}{T}\ \frac{dT}{dt} \equiv \beta \implies \frac{d^2R}{dr^2} = -\lambda^2 R \quad \text{i} \quad \frac{dT}{dt} = -\lambda^2 k\ T \tag{2}$$

Hem agafat $\beta \equiv \lambda^2 > 0$ (λ real) per tenir solucions finites a $t \to \infty$, és a dir:

$$T(t) = C\ e^{-\lambda^2 kt} \quad \text{per a} \quad \lambda \neq 0 \quad y \quad T(t) = D \quad \text{per a} \quad \lambda = 0 \tag{3}$$

Les solucions per a $R(r)$ són:

$$R(r) = A\sin(\lambda r) + B\cos(\lambda r) \quad \text{per a} \quad \lambda \neq 0 \tag{4}$$

$$R(r) = Er + F \quad \text{per a} \quad \lambda = 0 \tag{5}$$

La solució més general és una combinació lineal dels dos casos.[1] Per a $c = u/r$:

$$c(r,t) = \frac{u(r,t)}{r} = \frac{Er+F}{r} + \sum_{\lambda\neq 0}\ e^{-\lambda^2 kt}\left[A_\lambda \frac{\sin(\lambda r)}{r} + B_\lambda \frac{\cos(\lambda r)}{r}\right]. \tag{6}$$

Per que c sigui finit a $r = 0$ descartem les solucions divergents: $B_\lambda = 0$ y $F = 0$. La condició de contorn a $r = a$, implica $E = c_1$ i $\sin(\lambda a) = 0$, així tenim:

$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \quad n = 1, 2, 3\ldots \tag{7}$$

$$c(r,t) = c_1 + \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi r/a)\ e^{-n^2\pi^2 k/a^2\ t} \tag{8}$$

La condició inicial $c = c_0$, determina A_n com una sèrie de Fourier:

$$c_0 = c_1 + \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\ \sin(n\pi r/a) \tag{9}$$

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a (c_0 - c_1)\ r\ \sin(n\pi r/a)\ dr = (-1)^n (c_0 - c_1)\frac{2a}{n\pi} \tag{10}$$

Per tant, el resultat final és:

$$\boxed{c(r,t) = c_1 + \frac{2a(c_0 - c_1)}{r\pi}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\ \sin(n\pi r/a)\ e^{-n^2\pi^2 k/a^2\ t}}$$

[1] També podem oblidar nos del cas $\lambda = 0$ si homogeneïtzem la condició de contorn a base de definir una nova concentració: $\hat{c} = c - c_1$. El resultat final és evidentment el mateix.

P.2

1) La mesura de probabilitat associada al desplaçament en un segon és $dF = (\delta_2 + \delta_0 + \delta_{-1})/3$ (equivalentment $p_2 = 1/3$, $p_0 = 1/3$ i $p_{-1} = 1/3$). Els moments ordinaris i els cumulants fins a quart ordre que corresponen al desplaçament en un segon són:

$$\begin{array}{ll} m_1 = (2-1)/3 = 1/3 & k_1 = m_1 = 1/3 \\ m_2 = (4+1)/3 = 5/3 & k_2 = m_2 - m_1^2 = 5/3 - 1/9 = 14/9 \\ m_3 = (8-1)/3 = 7/3 & k_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = 20/27 \\ m_4 = (16+1)/3 = 17/3 & k_4 = m_4 - 4m_3m_1 - 3m_2^2 + 12m_2m_1^2 - 6m_1^4 = -98/27 \end{array}$$

Aleshores

$$\gamma_a = \frac{k_3}{k_2^{3/2}} = \frac{5}{7}\sqrt{\frac{2}{7}} = 0,3818 \quad \gamma_e = \frac{k_4}{k_2^2} = -\frac{3}{2} = -1,5$$

2) El desplaçament en un hora correspon a la suma de 3.600 desplaçaments independents del tipus anterior, els seus cumulants són:

$$k_1 = \frac{3600}{3} = 1200 = m\,, \quad k_2 = \frac{14}{9}3600 = 5600 = \sigma^2, \quad \sigma \approx 74,8331$$

Aquestes són la mitjana i la variança de la distribució normal associada en base al teorema del límit central.

$$k_3 = \frac{20}{27}3600 = 2666,\hat{6} \quad \gamma_a = 0,006363$$

$$k_4 = -\frac{98}{27}3600 = -13066,\hat{6} \quad \gamma_e = -0,00041\hat{6}$$

3) El valor molt petit de γ_a i γ_e justifiquen l'aproximació normal per a la posició al cap d'un hora. Cal tenir present la correcció per continuïtat per trobar la $p_{[1200]}$ i ens calen els valors tipificats de 1199,5 i 1200,5

$$\hat{x}_{tip} = \frac{x - 1200}{\sqrt{5600}}, \quad \hat{x}(1199,5) = -0,006681, \quad \hat{x}(1200,5) = 0,006681$$

Taula Schaum $fer(0) = 0,5$, $fer(0,01) = 0,5040$, interpolació linial $fer(0,006681) = 0,5 + 0,6681 \times 0,0040 \approx 0,50267$

$$p_{[1200]} \approx 2 \times 0,00267 = fer(0,006681) - fer(-0,006681) = 0,00535$$

4) $p_{[1200]}(\text{Poisson}\,\lambda = 1200) = 0,0115157$ és més del doble del factor correcte. La raó per la qual Poisson no és aplicable és que $\sigma_{\text{Poisson}} = \sqrt{1200} = 34,64$. La distribució de Poisson està molt més concentrada que la distribució real de la posició.

P.3 Coordenades paraboidals $x = uv\cos\varphi$, $y = uv\sin\varphi$ i $z = (u^2 - v^2)/2$

$$\hat{\imath} = e_x = e^x = dx = v\cos\varphi du + u\cos\varphi dv - uv\sin\varphi d\varphi$$

base covariant natural.

Els coeficients de Lamé són $h_u = h_v = \sqrt{v^2+u^2}$, $\quad h_\varphi = uv$ i si tenim present que és un sistema de coordenades ortogonal i que $|du| = 1/h_u$ podem fer correspondre $du = e^u/h_u = e_u/h_u$ i el mateix per a les altres components.

$$\hat{\imath} = \frac{v\cos\varphi e_u + u\cos\varphi e_v}{\sqrt{v^2+u^2}} - \sin\varphi e_\varphi$$

base ortonormal contravariant o "física". De nou si tenim en compte que $|\partial_u| = h_u$ aleshores $e_u = \partial_u/h_u$, etc.

$$\hat{\imath} = \frac{v\cos\varphi\partial_u + u\cos\varphi\partial_v}{v^2+u^2} - \frac{\sin\varphi}{uv}\partial_\varphi$$

base natural contravariant. De forma anàloga per als altres dos vectors de la base

$$\hat{\jmath} = e^y = dy = v\sin\varphi du + u\sin\varphi dv + uv\cos\varphi d\varphi, \quad \hat{k} = e^z = dz = udu - vdv$$

base covariant natural.

$$\hat{\jmath} = e_y = \partial_y = \frac{v\sin\varphi e_u + u\sin\varphi e_v}{\sqrt{v^2+u^2}} + \cos\varphi e_\varphi = \frac{v\sin\varphi\partial_u + u\sin\varphi\partial_v}{v^2+u^2} + \frac{\cos\varphi}{uv}\partial_\varphi$$

$$\hat{k} = e_z = \partial_z = \frac{ue_u - ve_v}{\sqrt{v^2+u^2}} = \frac{u\partial_u - v\partial_v}{v^2+u^2}$$

base ortonormal contravariant o "física" i base natural contravariant.

- Inversió del canvi

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}, \quad uv = \sqrt{x^2+y^2}, \quad u^2 - v^2 = 2z, \text{ aleshores } u^4 - 2zu^2 - x^2 - y^2 = 0$$

$$u^2 = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2+4x^2+4y^2}}{2} = z + r, \quad \text{on} \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad u = \sqrt{z+r}$$

$$v^2 = z + r - 2z = r - z, \quad v = \sqrt{r-z}$$

-

$$T_1^1 = e^\varphi \otimes e_u, \quad T_2 = uvd\varphi \otimes \sqrt{u^2+v^2}du = 2r\sqrt{x^2+y^2}d\varphi \otimes du$$

$$d\varphi = \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(-y\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{x}\right) = \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{z+r}}\left(\frac{dz}{2} + \frac{dr}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{z+r}}\left(dz + \frac{xdx + ydy + zdz}{r}\right)$$

Aleshores tenim

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)(z+r)}}\begin{pmatrix} -yx & -y^2 & -y(z+r) \\ x^2 & xy & x(z+r) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'expressió d'aquest tensor 2-covariant en cartesianes coincideix amb el mixt 1,1 i el 2-contravariant.

Qüestions

Q.1 Com J_n és solució de $J_n''(x)+J_n'(x)/x+(1-n^2/x^2)J_n=0$ posem $J_n(x)=y(x)/\sqrt{x}$, aleshores:

$$J_n'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(y'-\frac{y}{2x}\right),\quad J_n''(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(y''-\frac{y'}{x}+\frac{3}{4}\frac{y}{x^2}\right)$$

si ho posem a l'equació de Bessel queda

$$\frac{y''}{\sqrt{x}}+\frac{1}{4}\frac{y}{x^2\sqrt{x}}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x}}=0$$

que també pot escriure's

$$y''+\left(1-\frac{4n^2-1}{4x^2}\right)y=0$$

Quan $x\to\infty$ tenim que $(4n^2-1)/(4x^2)\to 0$ i podem negligir aquest terme i serà tant millor com més gran sigui x, en aquest cas tenim

$$y''(x)+y(x)\approx 0,\quad y(x)\approx A\sin x+B\cos x,\quad J_n(x)\approx\frac{1}{\sqrt{x}}(A\sin x+B\cos x)$$

Q.2 Transformen per Laplace

$$sF(s)-f(0)=\frac{1}{s^2}+F(s)\frac{s}{s^2+1},\quad F(s)\frac{s^3}{s^2+1}=4+\frac{1}{s^2}$$

$$F(s)=\frac{4}{s}+\frac{5}{s^3}+\frac{1}{s^5}$$

on hem aplicat que tenim un producte de convolució i hem agrupat termes. Per tant fent la transformada inversa tindríem:

$$f(t)=4+\frac{5}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4.$$

on hem utilitzat que $\mathcal{L}[x^n]=n!/s^{n+1}$

• Si haguéssim fet la derivada tindriem la integral de convolució amb la derivada de f amb el que encara es complica més, a part d'això com l'equació serà de segon ordre tindríem infinites solucions més, una per cada valor de la derivada primera de f a $t=0$, per tenir les mateixes solucions hauríem de posar $f'(0)=0$.

$\int_0 \operatorname{sen} x^2 dx \longrightarrow \int_0 \operatorname{sen} t x^2 dx$ PROBLEMA 1

$$\mathcal{L}_t\left[\int_0^\infty \operatorname{sen} t x^2 dx\right] = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty \operatorname{sen} t x^2 dx =$$

$$= \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{sen} t x^2 dx = \int_0^\infty dx \, \frac{x^2}{s^2+x^4}$$

$\mathcal{L}[\operatorname{sen} \underset{\downarrow \; x^2}{a} t] = \frac{a}{s^2+a^2}$; Para usamos la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^m dx}{x^n+a^n} = \frac{\pi a^{m+1-n}}{n \operatorname{sen}[(m+1)\pi/n]}$$

$0 < m+1 < n$

En nuestro caso $\begin{matrix} m=2 \\ n=4 \end{matrix}$ y escribimos

$a^4 = s^2$

$a^2 = s$; $a = s^{1/2}$

$$\int_0^\infty dx \, \frac{x^2}{s^2+x^4} = \frac{\pi (s^{1/2})^{-1}}{4 \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{1/2\sqrt{2}}} = \frac{\pi s^{-1/2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{1}{s^{1/2}}$$

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} t x^2 dx = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{1}{s^{1/2}}\right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{1/2}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} t^{-1/2}$$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$;

$n > 0$

Schaum = $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$?? | $\int_0^\infty \operatorname{sen} a x^2 dx =$

$$= \int_0^\infty \cos a x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

$t=1 \longrightarrow \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ OK

P1 b) $f(t) = \int_0^t (t-\tau)^{-b} \dot{y}(\tau)\, d\tau$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-\tau)^{-b} \dot{y}(\tau)\, d\tau\right\} = \mathcal{L}\{t^{-b}\} \cdot \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}$$

$$= \frac{\Gamma(1-b)}{s^{1-b}} \cdot \left(s\tilde{y}(s) - y(0)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{s^{1-b} F(s)}{\Gamma(1-b)} = s\tilde{y}(s) - y(0) \qquad \tilde{y}(s) = \frac{y(0)}{s} + \frac{1}{\Gamma(1-b)} s^{-b} F(s)$$

Antitransformem

$$y(t) = y(0)\, \mathcal{L}^{-1}\{1/s\} + \frac{1}{\Gamma(1-b)} \mathcal{L}^{-1}\{s^{-b} F(s)\}$$

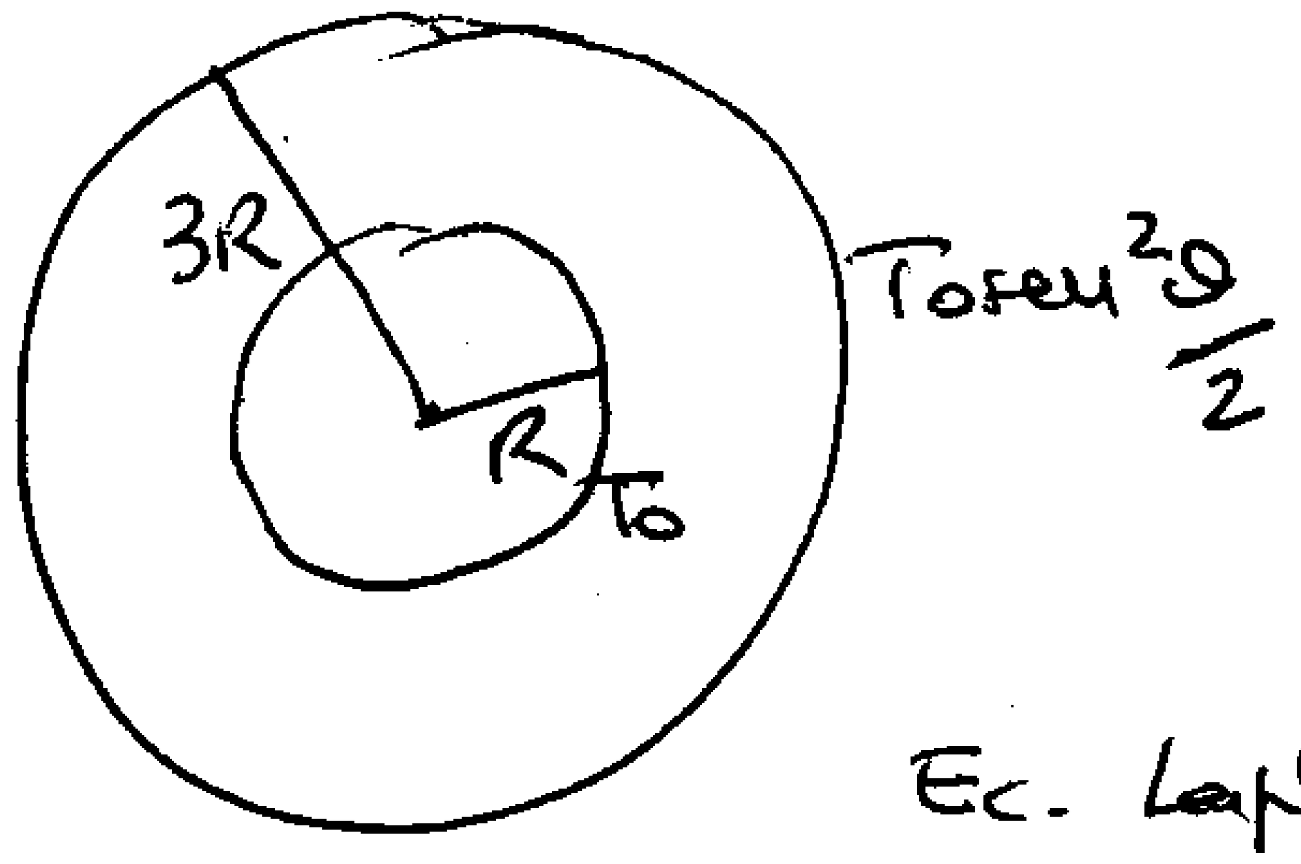
$$\boxed{y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(1-b)} \int_0^t \frac{\tau^{b-1}}{\Gamma(b)} f(t-\tau)\, d\tau}$$

Cas particular $f(t) = 1$

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(1-b)\Gamma(b)} \underbrace{\int_0^t \tau^{b-1}\, d\tau}_{\frac{1}{b}\tau^b\Big]_0^t = \frac{t^b}{b}}$$

$$\boxed{y(t) = y(0) + \frac{1}{b\Gamma(1-b)\Gamma(b)} t^b}$$

$b\Gamma(b) = \Gamma(b+1)$



PROBLEMA 2

$$\Delta T = 0$$

$$T(R,\theta) = T_0$$

$$T(3R,\theta) = T_0 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}$$

Ec. Laplace en esféricas + no dep en φ $\left\{ \begin{array}{l} \text{simetría esférica} \\ \underline{\text{NO}} \text{ dep} \\ \text{cond. contorno} \end{array} \right.$

Sol → finitas en $\cos\theta = \pm 1$!!

$$T(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

$$T(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \overbrace{\left(A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right)}^{C_l} P_l(\cos\theta) \qquad (i)$$

$$T(3R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{\left(A_l (3R)^l + \frac{B_l}{(3R)^{l+1}} \right)}_{\overline{C}_l} P_l(\cos\theta) \qquad (ii)$$

$P_0(\cos\theta) = 1$ | $\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}(P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta))$

$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

(i) $\quad T_0 P_0(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(\cos\theta)$

(ii) $\quad T_0 \frac{1}{2}[P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta)] = \sum_{l=0}^{\infty} \overline{C}_l P_l(\cos\theta)$

como $\{P_l(\cos\theta)\}$ conj. ortonormal (no normalizado a uno)

(i) $\quad T_0 P_0(\cos\theta) = C_0 P_0(\cos\theta)$ y $C_l = 0 \quad \forall l \geq 1$

(ii) $\quad T_0 \frac{1}{2}[P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta)] = \overline{C}_0 P_0(\cos\theta) + \overline{C}_1 P_1(\cos\theta)$

y $\overline{C}_l = 0 \quad \forall l \geq 2$

(i) $\left\{ \begin{array}{l} C_0 = T_0 \\ C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ \vdots \end{array} \right\}$ $\qquad$ (ii) $\left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_0 = \frac{1}{2} T_0 \\ \overline{C}_1 = -\frac{1}{2} T_0 \\ \overline{C}_2 = 0 \ \ldots \end{array} \right\}$

(i) $\left(A_0 + \frac{B_0}{R}\right)\cancel{P_0} = T_0\cancel{P_0}$

(ii) $\left(A_0 + \frac{B_0}{3R}\right)P_0 + \left(A_1(3R) + \frac{B_1}{(3R)^2}\right)P_1 = \left(\frac{1}{2}P_0 - \frac{1}{2}P_1\right)$

$$A_0 + \frac{B_0}{3R} = \frac{T_0}{2}$$

$$A_1(3R) + \frac{B_1}{(3R)^2} = -\frac{T_0}{2}$$

Necesitaríamos otra condición. usamos que término en $l=1$ en $r=R$ de cero!!

$$A_1 R + \frac{B_1}{R^2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} A_0 + B_0R^{-1} &= T_0 \\ A_0 + B_0(3R)^{-1} &= \frac{T_0}{2} \end{aligned}\right\} \quad B_0\left(\frac{3}{3R} - \frac{1}{3R}\right) = \frac{T_0}{2}$$

$$\frac{2B_0}{3R} = \frac{T_0}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B_0 = \frac{3}{2}\frac{T_0R}{2} = \frac{3}{4}T_0R}$$

$$A_0 + \frac{3}{4}T_0 = T_0 \Rightarrow \boxed{A_0 = \frac{T_0}{4}}$$

$$A_1(3R) + \frac{B_1}{(3R)^2} = -\frac{T_0}{2} \quad ; \quad -\frac{B_1}{R^{\cancel{3}}}\cdot 3\cancel{R} + \frac{B_1}{(3R)^2} = -\frac{T_0}{2}$$

$$A_1R + \frac{B_1}{R^2} = 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{B_1}{R^3} \qquad B_1\left[-\frac{3}{R^2} + \frac{1}{9R^2}\right] =$$

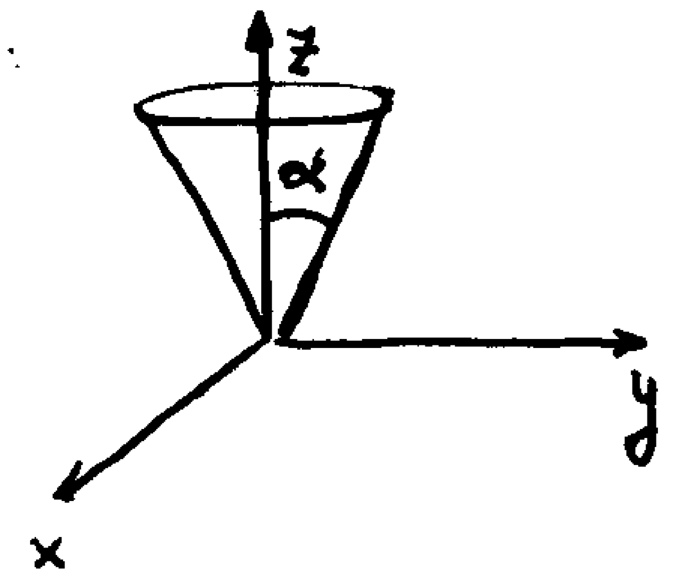
$$= B_1\left[-\frac{27}{9R^2} + \frac{1}{9R^2}\right] = -B_1\frac{26}{9R^2} = -\frac{T_0}{2}$$

$$\boxed{B_1 = \frac{9T_0R^2}{26\times 2}} = \frac{3^2}{13\times 4}R^2 = \boxed{\frac{9}{52}T_0R^2}$$

$$\boxed{A_1 = -\frac{9}{52}\frac{T_0R^2}{R^3} = -\frac{9}{52}\frac{T_0}{R}}$$

Problema 3

1. Con:



$$\text{Con} \xrightarrow{\ i\ } \mathbb{R}^3$$

Immersió en esfèriques: $\{r,\varphi\} \longleftrightarrow \{\bar r, \bar\theta, \bar\varphi\}$

amb $\bar r = r$, $\bar\theta = \alpha$, $\bar\varphi = \varphi$

$ds^2 = d\bar r^2 + \bar r^2 d\bar\theta^2 + \bar r^2 \sin^2\bar\theta\, d\bar\varphi^2$ és el quadrat de l'element de longitud a $\mathbb{R}^3$ en coordenades esfèriques. Especialitzant tenim

$d\bar r = dr$

$d\bar\theta = 0$ $\qquad ds^2 = dr^2 + r^2\sin^2\alpha\, d\varphi^2$ → Mètrica 2-covariant sobre el con

$d\bar\varphi = d\varphi$

$$g = dr\otimes dr + r^2\sin^2\alpha\, d\varphi\otimes d\varphi \ ; \ (g_{ij}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & r^2\sin^2\alpha\end{pmatrix}$$

La immersió en cartesianes és: $x = r\sin\alpha\cos\varphi$

$y = r\sin\alpha\sin\varphi$

$z = r\cos\alpha$

$$g_{ab}(y) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a}\frac{\partial x^j}{\partial y^b}\, g_{ij}(x)$$

$\{x^i\} = \{x,y,z\}$ $\quad \{y^i\} = \{r,\varphi\}$

$$g(r,\varphi) = \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi)}\right)^T \begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi)} =$$

$$= \begin{bmatrix}\sin\alpha\cos\varphi & \sin\alpha\sin\varphi & \cos\alpha\\ -r\sin\alpha\sin\varphi & r\sin\alpha\cos\varphi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\alpha\cos\varphi & -r\sin\alpha\sin\varphi\\ \sin\alpha\sin\varphi & r\sin\alpha\cos\varphi\\ \cos\alpha & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & r^2\sin^2\alpha\end{bmatrix} \ \blacksquare$$

2. Els coeficients de Lamé són $h_r = 1$ $\quad h_\varphi = r\sin\alpha$; $h_{\varphi,r} = \sin\alpha$ ⇒

⇒ els únics coefs. de Christoffel i de Ricci no nuls contindran dues 'φ' i una 'r':

$$\Gamma^\varphi_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{h_{\varphi,r}}{h_\varphi} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{h_\varphi h_{\varphi,r}}{h_r^2} = -r\sin^2\alpha$$

$$\gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{h_{\varphi,r}}{h_\varphi h_r} = \frac{1}{r} \qquad \gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{r}$$

3) $\left.\begin{array}{l}\Omega^i{}_j = \Gamma^i_{jk}\, dx^k \\ \omega^i{}_j = \gamma^i_{jk}\, e^k\end{array}\right\}$ donen els elements de la matriu d'1-formes de Cartan en la base holònoma o natural i en la física o ortogonal.

$$\Omega = \begin{bmatrix}0 & -r\sin^2\alpha\, d\varphi\\ \frac{1}{r}d\varphi & \frac{1}{r}dr\end{bmatrix} \ ; \quad \omega = \begin{bmatrix}0 & -\frac{e^\varphi}{r}\\ \frac{e^\varphi}{r} & 0\end{bmatrix}$$

4. $v = \dot r\,\partial_r + \dot\varphi\,\partial_\varphi = \dot r\, e_r + \dot\varphi\, r\sin\alpha\, e_\varphi$

a) base natural $\quad \nabla_v v = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\dot r\\ \dot\varphi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -r\sin^2\alpha\,\dot\varphi\\ \frac{\dot\varphi}{r} & \frac{1}{r}\dot r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot r\\ \dot\varphi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\ddot r - r\sin^2\alpha\,\dot\varphi^2\\ \ddot\varphi + \frac{2\dot\varphi\dot r}{r}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

b) base física

$$\nabla_v v = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\dot r\\ \dot\varphi r\sin\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -\dot\varphi\sin\alpha\\ \dot\varphi\sin\alpha & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot r\\ \dot\varphi r\sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\ddot r - r\dot\varphi^2\sin^2\alpha\\ \ddot\varphi r\sin\alpha + \dot\varphi\dot r\sin\alpha + \dot\varphi\dot r\sin\alpha\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Les eqs de les geodèsiques són, seguint qualsevol dels dos càlculs $\left.\begin{array}{l}\ddot r - r\sin^2\alpha\,\dot\varphi^2 = 0\\ r\ddot\varphi + 2\dot\varphi\dot r = 0\end{array}\right\}$

Problema 4.

1. El moviment en 1 segon és suma de dues variables independents: multinomial $\{(0,\frac{1}{3}),(1,\frac{1}{3}),(2,\frac{1}{3})\}$, $\frac{1}{3}(\delta_0+\delta_1+\delta_2)=dF$ i el d'una Poisson λ multiplicada pel factor -1. Els cumulants de la suma són la suma de cumulants.

a) Càlcul dels cumulants de la multinomial:

$$m_1=\frac{1}{3}(1+2)=\frac{3}{3}=1 \qquad k_1=1$$

$$m_2=\frac{1}{3}(1+4)=\frac{5}{3} \qquad k_2=m_2-m_1^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$$

$$m_3=\frac{1}{3}(1+8)=\frac{9}{3}=3 \qquad k_3=m_3-3m_1m_2+2m_1^3=3-5+2=0$$

$$m_4=\frac{1}{3}(1+16)=\frac{17}{3} \qquad k_4=m_4-4m_1m_3+12m_1^2m_2-6m_1^4-3m_2^2=$$

$$=\frac{17}{3}-12+20-6-\frac{25}{3}=2-\frac{8}{3}=-\frac{2}{3}$$

b) Si es multiplica una variable per un factor k el cumulant d'ordre r queda multiplicat per k^r. Per a la contribució Poisson al moviment en 1 segon els cumulants són $k_{2r}=\lambda \qquad k_{2r-1}=-\lambda \qquad r=1\ldots\infty$

Per X(1 segon) tenim els cumulants:

$$\left\{\begin{array}{l} k_1=m=1-\lambda \\ k_2=\frac{2}{3}+\lambda \\ k_3=-\lambda \\ k_4=-\frac{2}{3}+\lambda \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l}\sigma=\sqrt{\lambda+\frac{2}{3}} \\ \gamma_a=\dfrac{-\lambda}{(\lambda+\frac{2}{3})^{3/2}} \\ \gamma_e=\dfrac{\lambda-2/3}{(\lambda+\frac{2}{3})^2}\end{array}\right\} \text{ són els paràmetres estadístics}$$

2. Curtosi zero $\Leftrightarrow$ $\lambda_0=2/3$

Per aquest valor de λ X(1 segon) té per cumulants $k_1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$$k_2=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$k_3=-\frac{2}{3}$$

$$k_4=0$$

X(1 hora) té per cumulants $3600\times k_r$(1 segon)

$$k_1(\text{hora})=\frac{3600}{3}=1200$$

$$k_2(1\text{ hora})=3600\times\frac{4}{3}=4800 \qquad \sigma=69.28$$

$$k_3(1\text{ hora})=-2400$$

$$k_4(1\text{ hora})=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_a(1\text{ hora})=\dfrac{-2400}{(4800)^{3/2}}=-0.0072 \\ \gamma_e(1\text{ hora})=0\end{array}\right\}$$ Aprox. normal molt bona: 1200 ± 69 o també 1200 ± 70

3. $$P_{X(1\text{hora})}([+1200,+1300])=\text{fer}\left(\frac{1299.5-1200}{\sqrt{4800}}\right)-\text{fer}\left(\frac{1199.5-1200}{\sqrt{4800}}\right)=$$

$$=\text{fer}(1.4362)+(\text{fer}(0.0072)-1)=(0.9236+0.62\times0.0015)+(0.5+0.72\times0.0040)-1$$

$$=0.4274\lesssim0.43=43\%$$ Probabilitat lleugerament inferior al 43 %

QÜESTIONS COMPLEMENTÀRIES

Tensors:

Un espai vectorial i el seu dual són isomorfs si ..SÓN DE DIMENSIÓ FINITA

Per tal que en un espai vectorial es puguin considerar bases recíproques cal tenir definit un ..PRODUCTE ESCALAR..o, equivalentment, una ... MÈTRICA.....

Les components d'un vector contravariant en la base recíproca són iguals a les seves components ..COVARIANTS

La dimensió del espai dels tensors antisimètrics d'ordre r sobre un espai vectorial de dimensió n és .... $\binom{n}{r}$

La dimensió de l'àlgebra tensorial antisimètrica (o de Grassmann) sobre un espai vectorial de dimensió n és .... 2^n

La propietat fonamental del producte tensorial d'espais és que sobre ell ..linealitzen .... les aplicacions multilineals definides sobre el corresponent producte .cartesià d'espais.

Tota contracció de tensors pot considerar-se una ...CONTRACCIÓ INTERNA sobre el seu producte tensorial. Per contraure dos índexs contravariants ens cal tenir definit .UN TENSOR 2-COVARIANT que anomenen ..MÈTRICA

Per tal que l'aplicació tangent o "push-forward" associada a una aplicació f entre espais o varietats pugui aplicarse a tots els tensors cal que f sigui ..INVERTIBLE... Si f no és ..INVERTIBLE.... tan sols podem trobar la imatge dels tensors ..CONTRAVARIANTS

Probabilitat:

H(0)=1 és una propietat característica de la funció ..CARACTERÍSTICA d'una llei de probabilitat

H(+infty)=1 és una propietat característica de la funció DE DISTRIBUCIÓ d'una llei de probabilitat

H(0)=0 és una propietat característica de la funció ...CUMULANT d'una llei de probabilitat

La derivada de la funció de distribució (acumulativa) corresponent al llançament d'un dau és ...0... com a funció i ..... $\frac{1}{6}(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4+\delta_5+\delta_6)$... com a funció generalitzada o distribució.

La transformada de Fourier de la funció .CARACTERÍSTICA. és k · FUNCIÓ DENSITAT.. amb k= ...

Les distribucions GAUSSIANA... i .DE POISSON...... són estables respecte de la suma de v. indep.

Una variable Poisson de mitjana x té variança= x asimetria= $\frac{1}{\sqrt{x}}$ curtosi= $\frac{1}{x}$

La suma de variables aleatòries de tipus LORENTZIANA O CAUCHY. no convergeix cap a la normal. La raó és que aquesta llei de distribució no posseeix ..CAP CUMULANT...O...MOMENT

Totes les variables aleatòries tipificades presenten MITJANA ZERO i VARIANÇA UNITAT

Per a lleis de probabilitat discretes cal substituir la integral de LEBESGUE o RIEMANN (mesura proporcional a la longitud) per la integral de .LEBESGUE - STIELJES... que permet la integració amb mesures de tipus discret de ..DIRAC..

MMF II JUNY '04

P1 a) $\mathcal{L}\{J_1(ax)\}$

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} J_0(ax) = -a\, J_1(ax)$$

$$-a\,\mathcal{L}\{J_1(ax)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dx} J_0(ax)\right\} = s\,\mathcal{L}\{J_0(ax)\} - \underbrace{J_0(0)}_{=1}$$

$$\mathcal{L}\{J_1(ax)\} = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\right] \quad (1 \text{ punt})$$

b) Osc. harm. no ...

$$m\ddot{x}(t) + k x(t) = F(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = F(t)/m \qquad k/m = \omega_0^2$$

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t)/m = J_0(\omega_0 t)/m$$

$\downarrow$ Laplace

$$s^2 \tilde{x}(s) - s\underbrace{x(0)}_{=0} - \underbrace{\dot{x}(0)}_{=0} + \omega_0^2 \tilde{x}(s) = \frac{1/m}{(s^2+\omega_0^2)^{1/2}}$$

$$\tilde{x}(s) = \frac{1/m}{(s^2+\omega_0^2)^{3/2}} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{m}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+\omega_0^2)^{3/2}}\right\}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{m}\,\frac{t\,J_1(\omega_0 t)}{\omega_0}}$$

(2 punts)

Versión "normal" (I)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\qquad \left\{\begin{array}{l} u_x(0,t) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{array}\right\} \text{ c. c.}$$

$$u(x,0) = f(x);\quad 0<x<L$$

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$X(x)\frac{dT}{dt} = \alpha^2 \frac{d^2X}{dx^2} T \Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{\alpha^2 T}\frac{dT}{dt}}_{\text{func. } t} = \underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{\text{func. } x} = \lambda$$

cte separación!!

Como es SL (Problema Stürm-Liouville) $\lambda \in \mathbb{R}\left\{\begin{array}{l}\lambda>0\\ \lambda=0 \\ \lambda<0\end{array}\right.$ Tomamos $\omega>0$ y

$\lambda>0;\ \lambda=\omega^2$

$\lambda<0;\ \lambda=-\omega^2$

$\lambda=0$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \lambda X \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{d^2X}{dx^2} = \pm\omega^2 X \rightarrow \begin{array}{l}\text{(i) } X(x) = A\cosh\omega x + B\,\text{senh}\,\omega x \\ \text{(ii) } X(x) = A\cos\omega x + B\,\text{sen}\,\omega x\end{array} \\ \frac{d^2X}{dx^2} = 0 \Longrightarrow \frac{dX}{dx} = b;\ X(x) = a+bx \text{ (iii)}\end{array}\right.$$

Caso (iii) $\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0 = (b)_{x=0} \Rightarrow b=0;\quad X(L)=0=a;$ solución trivial!!

Casos (i) $\frac{dX}{dx} = A\omega\,\text{senh}\,\omega x + B\omega\cosh\omega x;\ \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow B=0$

(ii) $X(L)=0 = A\omega\cosh\omega L \Longrightarrow A=0$ sol trivial

$\hookrightarrow \frac{dX}{dx} = -A\omega\,\text{sen}\,\omega x + B\omega\cos\omega x;\ \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow B=0$

$X(L)=0 = A\cos\omega L = 0$ — $A=0$ (sol trivial)

$\cos\omega L = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$

($\omega>0$!!)

$\omega L = \frac{n\pi}{2};\ n = 1,3,5,7\ldots$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{2L}$$

único caso

$$\frac{1}{\alpha^2 T}\frac{dT}{dt} = -\omega^2;\quad \ln T = -\alpha^2\omega^2 t + \ln\bar{A}$$

$$T = \bar{A}e^{-\alpha^2\omega^2 t}$$

$$u(x,t) = X(x)T(t) = A\cos\omega_n x\, e^{-\alpha^2\omega_n^2 t}$$

Sol General. $u(x,t) = \sum^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{2L}\, e^{-\alpha^2\frac{n^2\pi^2}{4L^2}t}$

Det A_n? $\quad u(x,0)=f(x) \quad 0<x<L$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{2L}$$

Multiplicando por $\cos\frac{n\pi x}{2L}$ e integrando entre 0 y L

$$\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{2L}\,dx = \sum_{\substack{n'=1\\(\text{impar})}}^{\infty} A_{n'} \int_0^L \cos\frac{n\pi x}{2L}\cos\frac{n'\pi x}{2L}\,dx$$

Sabemos (SL) que cuando $n \neq n'$ son ortogonales luego

$$\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = A_n \int_0^L \cos^2\frac{n\pi x}{2L}\,dx$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a};$$ en nuestro caso $a = \frac{n\pi}{2L}$

$$\int_0^L \cos^2\frac{n\pi x}{2L}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}\frac{\cancel{2}n\pi x}{\cancel{2}L}}{\frac{\cancel{2}4n\pi}{\cancel{2}L}}\right]_0^L =$$

$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{L}{2\pi n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L = \frac{L}{2} + \frac{L}{2\pi n}\underbrace{\operatorname{sen}\frac{n\pi\cancel{L}}{\cancel{L}}}_{0} = \frac{L}{2};$$

$$\boxed{A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{2L}\,dx} \quad n = 1,3,5,\ldots$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{2L}\,dx \; ; \quad n = 1,3,5,\dots \qquad n = 2k+1$$
$$k = 0,1,2,3\dots$$

Caso $f(x) = u_0 = cte$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0 \cos\frac{n\pi x}{2L}\,dx = \frac{2u_0}{L}\int_0^L \cos\frac{n\pi x}{2L}\,dL$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a}$$

$$\int_0^L \cos \overset{a}{\frac{n\pi x}{2L}}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ n\neq 0!!}}{=} \left[\frac{2L}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2L}\right]_0^L = \frac{2L}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \; ; \; n = 1,3,5$$

$$A_n = \frac{4u_0}{\cancel{L}}\cdot\frac{\cancel{L}}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} = \frac{4u_0}{(2k+1)\pi}\operatorname{sen}(2k+1)\frac{\pi}{2}$$
$$k = 0,1,2,3$$

$$= \frac{4u_0}{(2k+1)\pi}(-1)^k$$

Luego en este caso:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4u_0}{(2k+1)\pi}(-1)^k \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\, e^{-\frac{\alpha^2(2k+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

(b) Qüestions de probabilitat (*0.5 punts en total*):

- Defineix molt breument (no més de 4-5 línies) els conceptes d'espai de probabilitat i de variable aleatòria.
- Defineix, a partir de la funció densitat de probabilitat, les funcions característica i cumulant. Quins són els coeficients dels seus desenvolupaments de Taylor en torn a l'origen? (no més de 5 línies).
- Fent-ne ús de l'aproximació normal a la llei de Poisson per a valors grans del paràmetre λ, dedueix una aproximació per a $\lambda!$.

1. Un espai de probabilitat és un espai mesurable $\{\Omega$ = espai mostral, conjunt de parts mesurables d'Ω ($=\mathcal{P}(\Omega)$, conjunt de totes les seves parts si Ω és finit$)\}$ dotat d'una mesura (de probabilitat) positiva i normalitzada a la unitat

$$p: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1], \quad p(\Omega)=1$$

Una variable aleatòria és una funció mesurable $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ (v.a. real, complexa, vectorial), Per tant, la imatge inversa d'un conjunt mesurable de $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ (borelià) és una part mesurable d'Ω (que, per tant, té assignada una probabilitat)

2. Si $f(x)$ és la funció densitat de probabilitat, la funció característica corresponent és $\varphi(t) = \langle e^{itx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$ $\left(= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x) \text{ en el cas general} \right)$

la seva sèrie de Taylor dóna els moments ordinaris $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} m_n$

la funció cumulant és $\psi(t) = \ln \varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} k_n$, on els k_n són els cumulants

3. Per a λ grans Poisson $\to$ Normal. Calculant p_λ amb $\lambda \in \mathbb{N}$ mitjançant les dues distribucions tenim:

$$\frac{\lambda^\lambda e^{-\lambda}}{\lambda!} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \cdot 1 \end{cases}$$

raonant amb la normal tipificada (altura $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ a la mitjana = origen i amplada $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$)

altura de la normal amb mitjana λ i $\sigma^2 = \lambda$ en el punt $x=\lambda$ per l'interval unitat associat a un valor de Poisson

$$\to \quad \lambda! \simeq \sqrt{2\pi\lambda}\, \lambda^\lambda e^{-\lambda} \quad \text{(Hem deduït la fórmula de Stirling)}$$

3. (a) Un flux unidireccional de partícules incideix sobre una placa semitransparent. Cada partícula té un 50% de possibilitats de ser absorbida per la placa, un 30% de travessar-la sense interacció i un 20% de resultar reflectida. Si l'absorció d'una partícula la fa avançar $10^{-6}m$. i la seva reflexió $2 \times 10^{-6}m$.

- Quines són la mitjana, variança, asimetria i excés o curtosi del moviment de la placa degut a la incidència d'una partícula.
- Quines són la mitjana i variança del desplaçament causat per N partícules incidents.
- Estima el nombre mínim de partícules (arrodonit a la unitat) que cal enviar per tal que amb un 99% de probabilitat la placa hagi avançat almenys 1 cm.

Puntuació 0.5 punts per apartat.

③ resum enunciat 1 partícula, moviment en micres (μm)

lleí de probabilitat discreta $dF = 0.3\,\delta_0 + 0.5\,\delta_1 + 0.2\,\delta_2$

a) $m_1 = 0.5 + 0.2 \times 2 = 0.5 + 0.4 = 0.9$

$m_2 = 0.5 + 0.2 \times 4 = 0.5 + 0.8 = 1.3$

$m_3 = 0.5 + 0.2 \times 8 = 0.5 + 1.6 = 2.1$

$m_4 = 0.5 + 0.2 \times 16 = 0.5 + 3.2 = 3.7$

cumulants: $k_1 = m_1 =$ mitjana $= 0.9\ \mu m = 0.9\ 10^{-6}\ m$

$k_2 = m_2 - m_1^2 = 1.3 - 0.81 = 0.49\ (\mu m)^2 = 0.49\ 10^{-12}\ m^2$; $\sigma = 0.7\ \mu m = 0.7\ 10^{-6}\ m$

$k_3 = m_3 - 3 m_1 m_2 + 2 m_1^3 = 2.1 - 3 \times 0.9 \times 1.3 + 2 \times 0.9^3 = 2.1 - 3.51 + 1.458 = 0.048\ (\mu m)^3$

$= 4.8\ 10^{-20}\ m^3$

asimetria $\gamma_a = \dfrac{k_3}{\sigma^3} = \dfrac{0.048}{(0.7)^3} = 0.13994 \sim 0.14$

$k_4 = m_4 - 4 m_3 m_1 - 3 m_2^2 + 12\, m_2 m_1^2 - 6 m_1^4 = 3.7 - 4 \times 2.1 \times 0.9 - 3 \times 1.3^2 + 12 \times 1.3 \times 0.9^2 -$

$- 6 \times 0.9^4 = -0.2306\ (\mu m)^4 = -0.2306\ 10^{-24}\ m^4$

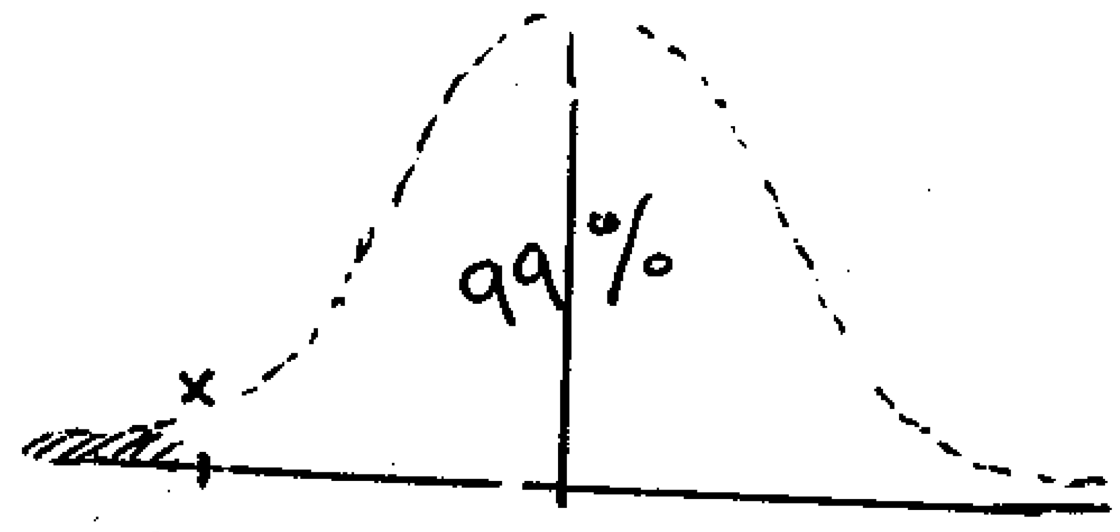
curtosi o excés $\gamma_e = \dfrac{k_4}{\sigma^4} = -\dfrac{0.2306}{0.2401} = -0.9604 \sim -0.96$

b) Per a N partícules incidents $m_1(N) = 0.9\ N\ \mu m = 0.9\ N\ 10^{-6}\ m$

$\sigma^2(N) = N \times 0.49\ (\mu m)^2 = 0.49\ N\ 10^{-12}\ m^2$

$\left\{ \sigma(N) = 0.7 \sqrt{N}\ \mu m \quad \gamma_a(N) = \dfrac{0.14}{\sqrt{N}} , \quad \gamma_e(N) = -\dfrac{0.96}{N} \right\}$

c)



$1\ cm = 10^{-2}\ m$ $0.9 N\ 10^{-6}\ m$

$\sigma = 0.7 \sqrt{N}\ 10^{-6}\ m$

$fer(\hat{x}) = 0.01$

$fer(2.326) = 0.99$

Per simetria de la gaussiana $\hat{x} = -2.326$ valor tipificat corresponent a $1\ cm = 10^{-2}\ m$

$-2.326 = \dfrac{10^{-2} - 0.9\ N\ 10^{-6}}{0.7 \sqrt{N}\ 10^{-6}}$

$-0.9\ N + 2.326 \times 0.7 \sqrt{N} + 10.000 = 0$

equació de 2on grau prenent $y = +\sqrt{N}$

$y = \dfrac{1.6282 + \sqrt{1.6282^2 + 36000}}{1.8} = \dfrac{1.6282 + 189.7436}{1.8} = 106.32$

$N \gtrsim y^2 = 11303.45 \longrightarrow 11304$ partícules és el resultat demanat

per aquest nombre la mitjana es situa a $10173\ \mu m = 1{,}0173\ cm$.

(comprovació del resultat: de la petita dispersió de la suma acumulada, típica de les aplicacions del Teorema del Límit central)

4. (a) Considera el sistema de coordenades parabòliques $\{z, t\}$ del pla euclidià definides per la seva relació amb les cartesianes $\{x, y\}$ establerta per les equacions

$$x = \frac{1}{2}(z^2 - t^2) \qquad y = zt$$

- Determina els vectors ∂_z, ∂_t en funció dels ∂_x, ∂_y, i calcula els seus productes escalars.
- Determina i escriu en forma matricial i tensorial (en les bases parabòliques naturals) les mètriques 2-covariant i 2-contravariant del plà euclidià. Calcula les normes del vector $v = t\partial_z - z\partial_t$ i de la forma $\alpha = zdz + tdt$.
- Expresa v i α en les bases físiques o ortonormals $\{e_z, e_t\}$ i $\{e^z, e^t\}$, respectivament.

Puntuació: 0.5 punts per apartat.

4. $x = \frac{1}{2}(z^2 - t^2) \qquad y = zt$

a) $\partial_z = \frac{\partial x}{\partial z}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial z}\partial_y = z\partial_x + t\partial_y \qquad \partial_z \cdot \partial_z = z^2 + t^2$

$\partial_t = \frac{\partial x}{\partial t}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial t}\partial_y = -t\partial_x + z\partial_y \qquad \partial_t \cdot \partial_t = z^2 + t^2 \qquad \partial_z \cdot \partial_t = 0$

b) Com a conseqüència del càlcul anterior(*) la mètrica 2-covariant tè per matriu $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} z^2+t^2 & 0 \\ 0 & z^2+t^2 \end{pmatrix}$ i la 2-contravariant $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1/z^2+t^2 & 0 \\ 0 & 1/z^2+t^2 \end{pmatrix}$

tractant-se d'un sistema ortogonal

En les bases naturals tenim

mètrica 2-covariant $= (z^2+t^2)(dz \otimes dz + dt \otimes dt)$

mètrica 2-contravariant $= \frac{1}{z^2+t^2}(\partial_z \otimes \partial_z + \partial_t \otimes \partial_t)$

$|v|^2 = v \cdot v = (t, -z)\begin{pmatrix} z^2+t^2 & 0 \\ 0 & z^2+t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -z \end{pmatrix} = (t^2+z^2)(z^2+t^2) \Rightarrow |v| = z^2+t^2$

$|\alpha|^2 = \alpha_i g^{ij} \alpha_j = (z, t)\begin{pmatrix} 1/z^2+t^2 & 0 \\ 0 & 1/z^2+t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \frac{z^2+t^2}{z^2+t^2} = 1 \Rightarrow |\alpha| = 1$

c) $e_z = \frac{\partial_z}{|\partial_z|} = \frac{\partial_z}{\sqrt{z^2+t^2}} \rightarrow \partial_z = \sqrt{z^2+t^2}\, e_z$ anàlogament $\partial_t = \sqrt{z^2+t^2}\, e_t$

$\Rightarrow v = t\partial_z - z\partial_t = \sqrt{z^2+t^2}\,(t e_z - z e_t)$

$e^z = \frac{dz}{|dz|} = \frac{dz}{\frac{1}{\sqrt{z^2+t^2}}} \rightarrow dz = \frac{e^z}{\sqrt{z^2+t^2}}$; anàlogament $dt = \frac{e^t}{\sqrt{z^2+t^2}}$

$\Rightarrow \alpha = z\,dz + t\,dt = \frac{1}{\sqrt{z^2+t^2}}(z e^z + t e^t)$

b*) Hom pot calcular també la mètrica calculant el quadrat de l'element de longitud

$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (z\,dz - t\,dt)^2 + (z\,dt + t\,dz)^2 = (z^2+t^2)dz^2 + (z^2+t^2)dt^2$.

$+ \cancel{dz\,dt\,(2zt - 2zt)}$

(b) Qüestions de tensors (*0.5 punts en total*):

- Defineix molt breument (2-3 línies) els conceptes de base dual i de base recíproca d'una base $\{e_i\}$ d'un espai vectorial real E de dimensió finita.
- Defineix el concepte de mètrica. Per què resulta important aquest concepte en la teoria de la relativitat? (no més de 6 línies en total).
- Aconsegueix una simplificació de l'expressió vectorial $(a \times b) \times (c \times d)$ fent ús de les propietats del tensor antisimètric unitat de tercer ordre de l'espai ordinari.

1. Donada una base $\{e_i\}$ d'un espai vectorial E de dimensió finita n la base dual $\{e^i\}$ de E^* queda definida per les relacions $e^i(e_j) = \delta^i{}_j$, de manera que e^i "selecciona" la component x^i del vector $\vec{x} = x^j e_j$.
La base recíproca de la $\{e_i\}$ és una nova base $\{\hat{e}_j\}$ del mateix espai vectorial E que, mitjançant el producte escalar, realitza funcions anàlogues a la base dual:
$$\hat{e}_j \cdot e_i = \delta_{ji} \Rightarrow \hat{e}_j \cdot (x^m e_m) = x^j$$
Pot també definir-se com la base contravariant mètricament associada a la base dual.

2. Una mètrica és un tensor 2-covariant simètric (en general no degenerat) que defineix les normes i angles que formen entre sí els vectors de l'espai E
$$g_{(2)} = g_{ij}\, e^i \otimes e^j \qquad v \cdot w \equiv |v||w| \cos(v,w) = v^i g_{ij} w^j \qquad |v|^2 = v^i g_{ij} v^j$$
La matriu inversa defineix en E^*, en la base dual, la corresponent mètrica mitjançant el tensor 2-contravariant $g^{ij} e_i \otimes e_j = g^{(2)}$
La mètrica de l'espai temps juga un paper fonamental en relativitat ja que dóna les normes i "angles" que són invariants en canvis de sistema de referència inercial. A diferència de l'espai ordinari no és definida positiva i, en la teoria de la relativitat general, depèn de la distribució de matèria-energia (equacions d'Einstein de la R.G.). En R. especial $g = -dx^0 \otimes dx^0 + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ o, equivalentment, amb els signes canviats $g = dx^0 \otimes dx^0 - dx \otimes dx - dy \otimes dy - dz \otimes dz$

3. $((a \times b) \times (c \times d))^i = \epsilon^i{}_{jk} (a \times b)^j (c \times d)^k = \epsilon^i{}_{jk}\, \epsilon^j{}_{mn}\, a^m b^n\, \epsilon^k{}_{rs}\, c^r d^s$
$=$ (opció a, contraure les dues primeres ϵ) $= (\delta^i{}_n \delta_{km} - \delta^i{}_m \delta_{kn})\, \epsilon^k{}_{rs}\, a^m b^n c^r d^s =$
$= b^i \epsilon^m{}_{mrs}\, a^m c^r d^s - a^i \epsilon_{nrs}\, b^n c^r d^s = \det(a,c,d)\, b^i - \det(b,c,d)\, a^i$
sovint $\det(a,c,d)$ = volum paral·lelepíped.... es diu producte "mixte" i s'indica com $a \cdot (c \times d)$.
La segona opció, consistent en contraure el 1er i 3er "ϵ" dóna resultats anàlegs expressant el resultat final com a combinació dels vectors c i d.